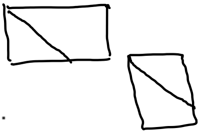
Heute (03.10.2013):

- Textbuch Kapitel 2.1, 2.2
- Matrixoperationen: Addition und Multiplikation
- Die Transponierte
- Die Inverse einer Matrix

Terminologie

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad m\{\underbrace{\boxed{A}}_{n} = \boxed{a_1 \qquad a_n}$

- $A = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ $a_1, \ldots, a_n$ Spalten von A
- *Diagonaleinträge* von A: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$
- A ist *Diagonalmatrix*, wenn $m = n$ und $a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$.
- Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $a_{ii} = 1$ ist *Einheitsmatrix* I_n.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Diagonaleinträge:

$1 \quad 5 \quad 9$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} \\ a_{m1} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{array}$$

Diagonalmatrix Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = (1)$$

Summe zweier linearer Abbildungen

$\cdot\ \forall u,v \in \mathbb{R}^n \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$

$\cdot\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \quad T(\alpha \cdot u) = T(u) \cdot \alpha$

$T, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen, dann ist $T + G$ mit

$T+G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(T + G)(x) = T(x) + G(x)$$

eine lineare Abbildung.

$\cdot\ (T+G)(u+v) = T(u+v) + G(u+v)$

$= T(u) + T(v) + G(u) + G(v)$

$= T(u) + G(u) + T(v) + G(v)$

$= (T+G)(u) + (T+G)(v)$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Standardmatrix von T und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Standardmatrix von G, dann ist

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Standardmatrix von $T + G$.

$\cdot\ (T+G)(\alpha \cdot u)$

$= T(\alpha \cdot u) + G(\alpha \cdot u)$

$= \alpha \cdot T(u) + \alpha \cdot G(u)$

$= \alpha\,(T(u) + G(u))$

$= \alpha \cdot (T+G)(u)$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1) \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrixaddition

Satz 12

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Es gelten*

a) $A + B = B + A$

b) $(A+B)+C = A+(B+C)$

c) $A + 0 = A$

$$0 \in \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} m$$

d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

e) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

f) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

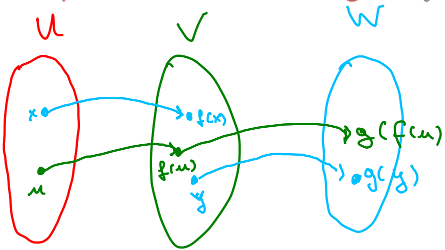
Komposition von Funktionen/Abbildungen

$$\cancel{\begin{matrix} a_{11} \cdot b_{11} & \cdots & a_{1n} \cdot b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} \cdot b_{m1} & \cdots & a_{mn} \cdot b_{mn} \end{matrix}}$$!

- U, V, W Mengen
- $f : U \to V$
- $g : V \to W$
- Die Funktion $g \circ f : U \to W$ mit der Vorschrift

$$(g \circ f)(u) = g(f(u))$$

heißt *Komposition* oder *Verkettung* von f und g



Verkettung linearer Abbildungen

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T(x)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G(y)} \mathbb{R}^p$$

Satz 13

Seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ lineare Abbildungen. Die Verkettung $G \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist eine lineare Abbildung.

<u>Beweis:</u> Wir müssen die Eigenschaften einer linearen Abbildung für $(G \circ T)$ nachweisen:

i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ soll $(G \circ T)(u+v) = (G \circ T)(u) + (G \circ T)(v)$ gelten.

$$(G \circ T)(u+v) = G(T(u+v)) \overset{\text{da } T \text{ linear}}{=} G(T(u)+T(v)) \overset{G \text{ linear}}{=} G(T(u)) + G(T(v)) = (G \circ T)(u) + (G \circ T)(v) \checkmark$$

ii) $\forall u \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $(G \circ T)(\alpha \cdot u)$

$$= G(T(\alpha \cdot u)) = G(\alpha \cdot T(u)) = \alpha \cdot G(T(u)) = \alpha \cdot (G \circ T)(u) \checkmark$$

Die Standardmatrix von $G \circ T$

Beispiel: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $T(x) = \underbrace{\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ \end{array}}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Die Standardmatrix von $(G \circ T) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$

$$a_1 = (G \circ T)(e_1) = G(T(e_1)) = G\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 \\ 11 & 25 & 10 \end{pmatrix}$

Standardmatrix von $G \circ T$

Die Standardmatrix von $G \circ T$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

Beispiel: $T(x) = A \cdot x \qquad A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$G(x) = B \cdot x \qquad B := (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$B \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} B \cdot a_1 & B \cdot a_2 & \cdots & B \cdot a_n \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \Big\} \, p \text{ Zeilen}$$

Die Standardmatrix von $G \circ T$

- $B = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Standardmatrix von $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ Standardmatrix von $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
- Standardmatrix von $G \circ T$ ist

Aufpassen! A und B im Vergleich zu voriger Folie.

$$A \circ B = (Ab_1 \cdots Ab_n) \in \mathbb{R}^{?}$$

A mal erste Spalte von B ist erste Spalte des Ergebnisses.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{G:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(G \circ T) \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$A \cdot B$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann ist $A \cdot B$ die Matrix

$$(Ab_1 \cdots Ab_n) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Zeilen-Spalten Regel

- $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$
- $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $(A \cdot B)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{?}$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \boxed{10} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)_{21} =$

i-te Zeile

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

j-te Spalte

A · B

$i \rightarrow$, j

$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj}$

Satz 14

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und B und C Matrizen für die die angegeben Produkte und Summen definiert sind. Dann gelten

a) $A(BC) = (AB)C$

b) $A(B + C) = AB + AC$

c) $(B + C)A = BA + CA$

d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

e) $I_m A = A I_n = A$

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad n \text{ Zeilen}$$

n Spalten.

Gilt $AB = BA$?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & \\ & \dots \end{pmatrix}$$

Warnung:

1. In der Regel gilt nicht $AB = BA$
2. Aus $AB = AC$ folgt in der Regel nicht $B = C$
3. Wenn $AB = 0$, dann folgt in der Regel nicht $(A = 0$ oder $B = 0)$

2.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{B}_{\in 2\times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21}+1 & b_{22}+1 \end{bmatrix}$

$\neq B$

3.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die Transponierte

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Transponierte von A ist die Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, deren Spalten, die jeweiligen Zeilen von A sind.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften der Transponierten

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Die Inverse einer Matrix

Definition

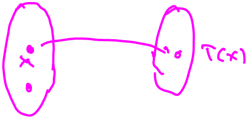
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix A ist *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $AB = BA = I_n$. Die Matrix B wird dann mit A^{-1} bezeichnet.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A$$



Wann ist eine Matrix invertierbar?

Satz 15

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar wenn die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$ sind.

Beweis: „$\Leftarrow$" $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ist Basis des $\mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist:

A ist invertierbar.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

i-te Spalte von $A^{-1} = \begin{matrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{matrix}$

da Spalten Basis des $\mathbb{R}^n$

$$A \cdot (\text{Spalte } i \text{ von } A^{-1}) = e_i$$

$\Downarrow$

Es gibt $x_{1i}, \ldots, x_{ni} \in \mathbb{R}$ mit $a_1 x_{1i} + \cdots + a_n x_{ni} = e_i$

später. $\square$

2×2 Matrizen

Satz 16

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ein Algorithmus zur Berechnung der Inversen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ein Algorithmus zur Berechnung der Inversen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$