Lineare Algebra

Heute (29.10.2013):

- Textbuch Kapitel 3.2, 3.3
- Schnelle Berechnung der Determinante
- Co-Faktoren
- Entwicklung nach i-ter Zeile oder j-ter Spalte
- Die Cramersche Regel
- Die Adjungierte

Berechnung der Determinante

Schnelle Berechnung der Determinante

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \left(* \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} (* -3)$$

$$= \cancel{2}\,4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schnelle Berechnung der Determinante

$$4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} (*4) \\ + \end{matrix}$$

$$= -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 28$$

Die Determinante der elementaren Matrizen

i) j-te $\text{Zeile}_{\text{neu}}$ = j-te $\text{Zeile}_{\text{alt}}$ + λ * i-te Zeile. $i \neq j$

A' Ergebnis dieser Op. aus A.

$$A' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ \lambda & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}} A$$

j-te Zeile

i-te Spalte

Elementare Matrix $E^{(1)}_{(j,i,\lambda)}$

$$\det\left(E^{(1)}_{(j,i,\lambda)}\right) = 1$$

da Typ i) Operationen det invariant lassen.

$$\det\left(E^{(1)}_{(j,i,\lambda)}\right) = \det\left(E^{(1)}_{j,i,\lambda} \cdot I_n\right) = \det(I_n)$$

Die Determinante der elementaren Matrizen

ii) Vertauschen von Zeile i und k

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ 0 \cdots 0 & & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 \cdots 0 & & 1 & 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E^{(2)}_{(i,k)}} A$$

i-te, k-te Zeile.

$$\det\left(E^{2}_{(i,k)}\right) = -1$$

Die Determinante der elementaren Matrizen

iii) i-te Zeile neu = i-te Zeile alt $\cdot\ \alpha$

! α muss nicht null sein!

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E^{(3)}_{(i,\alpha)}} A$$

i-te Zeile

$$\det(A') = \alpha \cdot \det(A)$$

$$\det\left(E^{(3)}_{(i,\alpha)}\right) = \alpha$$

Multiplikativität der Determinante

Satz 36

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Warnung!

Es gilt *nicht* $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

$A = I_n$

$B = I_n$

$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 2^n$

$\det(A) + \det(B) = 2$

※ ungleich, wenn $n \geq 2$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = 2^{4} \cdot 3^{3}.$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\det\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{B}\right] = \underbrace{(-1) \cdot 6}_{\det(A)} \cdot \underbrace{(-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}_{\det(B)}$$

$\sqrt{2}$ ist keine Rationale Zahl.

Annahme $\sqrt{2}$ ist von der Form $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \{1,2,3..$

mit 2 teilt nicht p und 2 teilt nicht q

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \underline{2 \cdot q^2} = \underline{p^2}$$

$\Rightarrow$ 2 teilt p (p gerade) also $p = 2 \cdot p'$ mit $p' \in \{1,2,\dots\}$

also $2 \cdot q^2 = 4 \cdot (p')^2 \Leftrightarrow q^2 = 2 \cdot (p')^2$

also q gerade, 2 teilt q $\lightning$.

Co-Faktoren

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$
- A_{ij} ist die Matrix die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.
- $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ ist der (i,j)-Co-Faktor.

$$\det(A) = a_{11}\cdot C_{11} + a_{12}\cdot C_{12} + \dots + a_{1n}\cdot C_{1n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7)$$

$$= 4\cdot 8 - 5\cdot 7$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte

Satz 37

Es gilt mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach i-ter ~~Spalte~~ Zeile)*
- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach j-ter Spalte)*

$$\det\begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \\ \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}.$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte

Satz 37

Es gilt mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach* i*-ter Spalte)*
- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach* j*-ter Spalte)*

$$\det \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & a_{2j} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix} = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (1)\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot (2)(-3) = 12$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; *(-2) \;\; *(3) \;\; = (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= (-18)$$

Satz 38
Es gilt mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(A) = \det(A^T).$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\parallel$$

$$a \cdot d - b \cdot c$$

Die Cramersche Regel

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$
- $A_i(b) = (a_1 \ \cdots \ b \ \cdots \ a_n)$

$$\left(\boxed{\begin{matrix}\text{i-1}\\ \text{Spalten}\\ \text{alt}\end{matrix}} \ \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \ \boxed{\begin{matrix}\text{n-i}\\ \text{alte}\\ \text{Spalten}\end{matrix}} \right) = A_i(b)$$

Satz 39

Sei A invertierbar, dann ist die eindeutige Lösung von

$$Ax = b$$

von der Gestalt

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}. \quad , i = 1, \dots, n.$$

Beispiel

$3\cdot 20 - 2\cdot 27 = 60 - 54 = 6$

$$
\begin{array}{rcrcr}
3x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\
-5x_1 & + & 4x_2 & = & 8
\end{array}
$$

$-5\cdot 20 + 4\cdot 27$

$= -100 + 108 = 8$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $x_1 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}{2} = 20$

$\det(A) = 2$

$x_2 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}}{2} = 27$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcl} 3sx_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ -6x_1 & + & sx_2 & = & 1 \end{array}$$

Für welche werte von s hat das obige System genau eine Lösung?

$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{aligned} \det &= 3s^2 - 12 \\ &= 3(s^2-4) \\ &= 3(s-2)(s+2) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{s \neq \pm 2}}$$

Die Adjungierte

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die *Adjungierte* von A ist die Matrix $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

j-te Komp von b_i =

$$\det\begin{pmatrix} \sim & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \sim \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})}{\det(A)}$$

Ziel: A invertierbar, wir möchten A^{-1} berechnen.

$$A^{-1} = (b_1, \dots, b_n)$$

b_i ist Lösung von GLS.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot b_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.\ \text{Pos}$$

Inversenformel

Satz 40

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Beispiel

$\det(A) = 14$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/14 & , & \dots \\ 3/14 & & \\ 5/14 & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11}/\det(A) & \\ C_{12}/\det(A) & \\ C_{13}/\det(A) & , \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ? \; ?$$

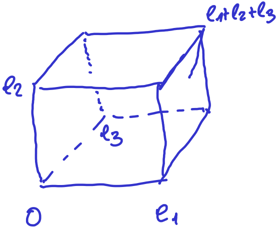
$C_{11} = -2$

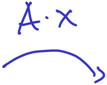
$C_{12} = (-1)(-3) = 3$

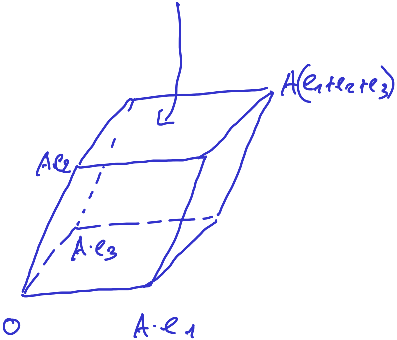
$C_{13} = (1) \cdot 5 = 5$

Volumen von Parallelepipeden.

$$\mathrm{Vol} = |\det(A)|$$







Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$