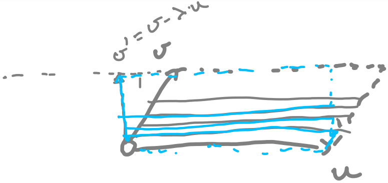
Heute (24.10.2013):

- Textbuch Kapitel 3.1, 3.2
- Linearität der Determinante
- Eigenschaften der Determinante
- Co-Faktoren
- Entwicklung nach i-ter Zeile oder j-ter Spalte

Wiederholung: Determinante



$u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$\|u\| \cdot \Delta$

Länge von u

$\begin{pmatrix} a & b \\ \cancel{c} & d \end{pmatrix}$

$\cdot \frac{c}{d}$

Flächeninhalt:

$\begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$|ad - bc|$

$d \neq 0$

$c - \lambda \cdot d = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{d}$

$\begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Wiederholung: Determinante

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{j+1} \cdot \det(A_{1j})$

$$\boxed{\begin{array}{c} \det(\alpha) = \alpha \\ (\alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \end{array}}$$

$+1 \quad - \quad + \quad -$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

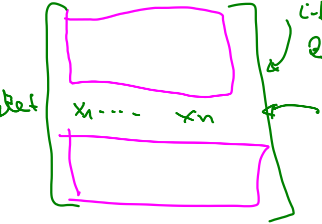
$\det(A) = a \cdot 1 \cdot d + b \cdot (-1) \quad c$

$= a \cdot d - b \cdot c$

Linearität der Determinante

- Nehmen wir an, die i-te Zeile ist unbestimmt.
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als i-te Zeile von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A_{(i,x)}$ und somit eine Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} T_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \hline & x & \longmapsto & \det(A_{(i,x)}). \end{array}$$



i-te Zeile fehlt.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$: $T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) $\forall u \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot T(u) = T(\alpha \cdot u)$

Linearität der Determinante

Satz 38

Die Abbildung $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

Eigentlich beweist man dies per Induktion. Wir führen den Nachweis für $n = 1, 2, 3$. Alle Ideen für den allgemeinen Beweis sind hier schon vorhanden.

$n = 1$: *Was ist in diesem Fall $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?*

Sei $x \in \mathbb{R}$: $\underline{T(x) = x}$

i) $T(\underset{\in\mathbb{R}}{u} + \underset{\in\mathbb{R}}{v}) = u + v = T(u) + T(v)$

ii) $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot u = \lambda \cdot T(u)$

$n = 2$:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot d - x_2 c$$

$$= \underbrace{(d \ \ -c)}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{linear!}$$

$$T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (b \ \ -a)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{linear.}$$

$\Rightarrow$ Satz gilt für $n=2$

$n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \overbrace{\det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}}^{=\alpha_1} - x_2 \overbrace{\det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}}^{=\alpha_2}$$

$$+ x_3 \cdot \overbrace{\det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}}^{=\alpha_3}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ linear!

$n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$= a \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ h & i \end{pmatrix}}_{\shortparallel} - b \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ g & i \end{pmatrix}}_{\shortparallel} + c \cdot \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ g & h \end{pmatrix}$$

die Determinante einer 2×2 Matrix ist linear in jeder Zeile. ⇝

$$= a \cdot (\alpha_2 \;\; \alpha_3)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - b \cdot (\beta_1 \;\; \beta_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + c \cdot (\gamma_1 \;\; \gamma_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists$ Zahlen $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$= (-b\cdot\beta_1 + c\cdot\gamma_1,\; a\alpha_2 + c\gamma_2,\; a\alpha_3 - b\cdot\beta_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$n = 3$:

T_3 genau wie T_2 !!

Linearität in jeder Spalte

- Nehmen wir an, die j-te Spalte ist unbestimmt.
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als j-te Spalte von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A^{(j,x)}$ und somit eine Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} C_j: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \det(A^{(j,x)}). \end{array}$$

Linearität in jeder Spalte

Satz 39

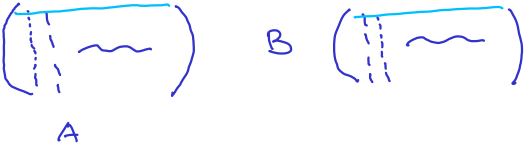
Die Abbildung $C_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

Dies zeigt man ähnlich zum vorhergehenden ~~Satz~~.
"Beweis"

Lemma: Geht $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch Vertauschung zweier Benachbarter Spalten aus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hervor, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.

Quasibeweis: $A = (a_1\ a_2 \cdots a_n)$ $\quad B = (a_2\ a_1\ a_3 \cdots)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



$\det(A) = a_{11} \cdot \det\left(\vdots \sim \right) - a_{12} \cdot \det\left(\vdots \sim \right)$

$+ a_{13} \cdot \det\left(\vdots\ \vdots\ ☺ \right)$

$\det(B) = a_{12} \cdot \det\left(\vdots\ \sim \right)$

$- a_{11} \det\left(\vdots\ \sim \right)$

$+ a_{13} \det\left(\vdots\ \vdots\ ☺ \right)$

Induktionsvoraussetzung

$\det\left(\vdots\ \vdots\ ☺ \right) = -\det\left(\vdots\ \vdots\ ☺ \right)$ $\boxed{\text{✓}}$ (na ja!)

Korollar: Geht B durch Vertauschung zweier Spalten aus A hervor, dann gilt $\det(A) = -\det(B) \quad | \cdot(-1)$

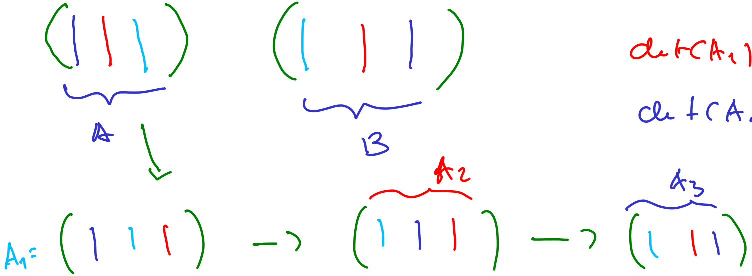
Quasibeweis:

$$\det(B) = (-1)^3 \cdot \det(A)$$

$$\det(A_1) = -\det(A)$$

$$\det(A_1) = -\det(A_2)$$

$$\det(A_2) = -\det(A_3)$$



$1 \; 2 \; \dots \; k \qquad\qquad k \; 2 \; \dots \; k-1 \; 1$

$2 \; 1 \; 3 \; \dots \; k$

$2 \; 3 \; \dots \; k-1 \; k \; 1$ $\quad (k-1)$ Paarweise Vertausch.

$(k-2)$

$(k-1)+(k-2)$

$= 2k-3$

$k \; 2 \; \dots \; k-1 \; 1$

ungerade!

Korollar: A hat zwei gleiche Spalten, dann gilt

$$\det(A) = 0$$

Beweis:

gleiche Spalten.

Aus vorigem Satz

$$\Rightarrow \det(A) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \det(A) = 0$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0$$

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\operatorname{rang}(A) < n$.

Linearität

$T(\cancel{\lambda_1} \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_2 \cdot T(a_2) + \dots + \lambda_n \cdot T(a_n)$

$\Rightarrow \det(A) = 0$.

Beweis: Die Spalten von A sind linear abhängig.

$\Rightarrow$ ~~Ein~~ Es gibt eine Spalte, die Lin. Komb. der anderen Spalten ist.

O.B.d.A. Erste Spalte ist LK der anderen.

$A = \left(\lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 a_3 \cdots + \lambda_n a_n, a_2, \dots, a_n \right)$, $\det(A)$ ist ja linear in jede Spalte.

$\det(A) = \lambda_2 \cdot \det(a_2, \underset{=0}{a_2}, \dots, a_n) + \lambda_3 \cdot \det(a_3, a_2, \underset{=0}{a_3}, \dots) \dots$

$= 0$

$\square$

Korollar

Geht $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch Addition des Vielfachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile hervor, so gilt

$$\det(A) = \det(B).$$

Beweis: (Wir nehmen an, die erste Zeile wird ersetzt).

$i \neq 1$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{a_1 + \lambda \cdot a_i} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{a_1 + \lambda \cdot a_i} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boxed{a_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boxed{\lambda \cdot a_i} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{= \det(A)} + \lambda \cdot \overbrace{\det\begin{pmatrix} a_i \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}^{\text{„}0\text{“}}$$

Korollar

Wenn B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen hervorgeht, dann gilt

$$\det(B) = -\det(A).$$

Beweisen!

Linear abhängige Zeilen/Spalten

Satz 40

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *dann gilt* $\det(A) = 0$ *genau dann wenn* $\mathrm{Rang}(A) < n$.

Beweis:($\Leftarrow$) Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die erste Spalte eine Linearkombination der anderen Spalten ist.

($\Rightarrow$) A kann durch elementare Zeilenoperationen vom Typ 1) und 2) in obere Dreiecksform überführt werden.

Elementare Zeilenoperationen

Satz 41

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

i) *Wenn ein Vielfaches einer Zeile von* A *auf eine andere Zeile von* A *addiert wird und man somit die Matrix* B *erhält, dann gilt*

$$\det(B) = \det(A).$$

ii) *Wenn* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen hervorgeht, dann gilt*

$$\det(B) = -\det(A).$$

Beweis
fast wie Spaltenfall.

iii) *Wenn* B *durch Skalierung einer Zeile in* A *mit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *hervorgeht, dann gilt*

$$\det(B) = \alpha \cdot \det(A)$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

Untere (r)

Obere.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$- a_{12} \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix

Satz 42

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine Dreiecksmatrix ist, dann ist* $\det(A)$ *das Produkt der Diagonaleinträge.*

Berechnung der Determinante

$(n \times n)$ Berechnung nach Def.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det(A_{1j})$$

Sei $K(n)$ die Anzahl "det"-Aufrufe.

$$K(n) = n \cdot K(n-1) = n!$$

1000×1000

Schnelle Berechnung der Determinante

Die Determinante der elementaren Matrizen

Multiplikativität der Determinante

Satz 43

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *gilt:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Warnung!

Es gilt *nicht* $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Co-Faktoren

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
- A_{ij} ist die Matrix die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ ist der (i, j)-Co-Faktor.

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte

Satz 44

Es gilt mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach* i*-ter Spalte)*
- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach* j*-ter Spalte)*

Beispiel

A und A^T

Satz 45

Es gilt mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det(A) = \det(A^T).$$