Lineare Algebra

Heute (22.10.2013):

- Textbuch Kapitel 3.1, 3.2
- Die Determinante
- Determinanten im $\mathbb{R}^2$
- Rekursive Definition
- Eigenschaften der Determinante

Die Determinante

angenommen $a \neq 0$ ZSF:

Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big] - * \frac{c}{a}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} \cdot b \end{pmatrix}$$

$d - \frac{c}{a} \cdot b = 0 \Leftrightarrow ad - cb = 0$

ist invertierbar genau dann, wenn $ad - cb \neq 0$.

Von voriger Vorlesung: A invertierbar $\Leftrightarrow$ Rang$(A) = 2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ lin. unabh.

$$ad - cb = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot (-b) + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot a = 0$$

Linearkombination von $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

Die Determinante

Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

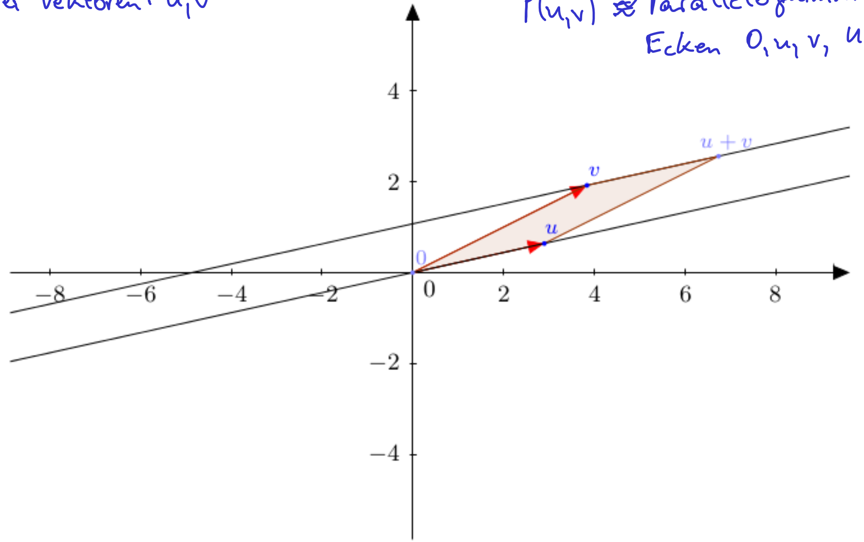
ist invertierbar genau dann, wenn $ad - cb \neq 0$.

Wie kann man diesen Ausdruck interpretieren?

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms

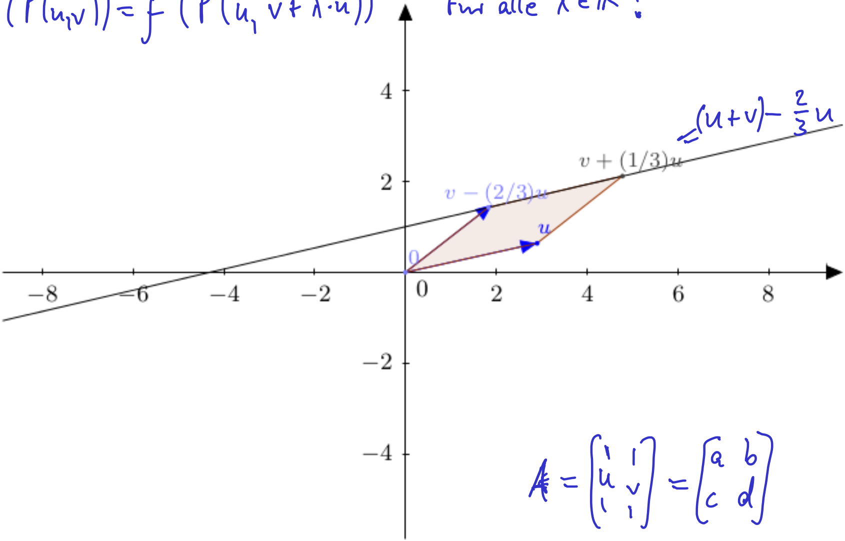
zwei Vektoren: u, v

$P(u,v)$ ≈ Parallelogramm mit Ecken $0, u, v, u+v$



Der Flächeninhalt eines Parallelogramms

$F(P(u,v)) = F(P(u, v + \lambda \cdot u))$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$!



$= (u+v) - \frac{2}{3}u$

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1 Fall: $c = 0$

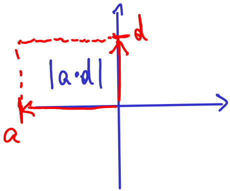
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

falls $c=0$, dann gilt mit $\lambda = -\frac{b}{a}$

$$F(P(u,v)) = F\left(P\left(u, v - \frac{b}{a} u\right)\right)$$

$$= F\left(P\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}\right)\right) = |a \cdot d|$$



2 Fall: $c \neq 0$

$$\begin{array}{cc} u & v \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Vielfaches von } u \text{ auf } v \text{ addiert}} \begin{array}{cc} & \overbrace{\phantom{b - \frac{d}{c}a}}^{\neq 0} \\ \left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} b - \frac{d}{c} a \\ 0 \end{array} \right) \\ u & v \end{array}$$

$\neq 0$ wenn A invertierbar $\Leftrightarrow$ u, v lin unabh.

$$\lambda = -\frac{d}{c}$$

Vielfaches von v auf u addiert $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & b - \frac{d}{c} a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt ?

$$F\left(P\left(\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b - \frac{d}{c} a \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \left| c\left(b - \frac{d}{c} a\right) \right|$$

$$= |cb - ad|$$

Definition

Die *Determinante* einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist $\det(A) = ad - bc$.

vorhin: A invertierbar
$\iff ad - bc \neq 0$
$\iff \det(A) \neq 0$

Satz 30

Sei $A = (uv) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Spalten $u, v \in \mathbb{R}^2$. Der Absolutbetrag der Determinante $|\det(A)|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Ecken $0, u, v, u + v$.

Rekursive Definition

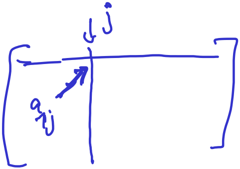
Definition

- Die Determinante einer 1×1-Matrix ist der einzige Eintrag dieser Matrix
- Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $n \geqslant 2$ ist die Determinante von A

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \cdot \det(A_{1j})$$

Entwicklung nach erster Zeile

wobei die $n-1 \times n-1$-Matrix A_{1j} durch Streichen der ersten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.



Beispiele

$A = (2) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ $\qquad \det(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 1 \cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{=-9} - 2 \underbrace{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{= 2\cdot 0 - 3\cdot 1 \\ = -3}} + 3 \cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{=4}$$

$$= -9 + 6 + 12 = 9$$

Beispiele

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Linearität der Determinante

- Nehmen wir an, die i-te Zeile ist unbestimmt. (i fest)
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als i-te Zeile von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A_{(i,x)}$ und somit eine Abbildung:

$$\begin{aligned} T_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \det(A_{(i,x)}). \end{aligned}$$

$$A_{(i,x)} = \begin{array}{c c} & \\ i \to & \begin{bmatrix} \boxed{} \\ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \\ \boxed{} \end{bmatrix} \\ & \end{array}$$

$$T_i(x) = \det(A_{(i,x)})$$

Linearität der Determinante

Satz 31

Die Abbildung $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

Eigentlich beweist man dies per Induktion. Wir führen den Nachweis für $n = 1, 2, 3$. Alle Ideen für den allgemeinen Beweis sind hier schon vorhanden.

$n = 1$: *Was ist in diesem Fall $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?*

$T(x) = x$

$n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$T_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ c & d \end{pmatrix} = x_1 \cdot d - x_2 \cdot c$$

$$= \begin{bmatrix} d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

linear!

$$T_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = a \cdot x_2 - b \cdot x_1 = \begin{bmatrix} -b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vektor x

also auch linear

$B \cdot x$