Heute (17.10.2013):

- Textbuch Kapitel 2.8, 2.9, 3.1
- Noch einmal der Spaltenraum
- Dimension und Rang
- Einführung in Determinanten

Spaltenraum

n Spalten

Definition

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$.
Der *Spaltenraum* ist das Erzeugnis der Spalten von A

$$\mathrm{Col}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung: $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$.

Erinnerung:

$H \subseteq \mathbb{R}^m$ ist Unterraum

i) $0 \in H$

ii) $\forall u, v \in H: u + v \in H$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in H: \alpha \cdot u \in H$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{col}(A) = \left\{ \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot \alpha_3 + 4 \cdot \alpha_4 \\ 2 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 + 2 \cdot \alpha_4 \\ 2 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 + 3 \cdot \alpha_4 \end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Noch einmal: $\ker(A)$

Erinnerung:

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Satz 23

$\ker(A)$ *ist ein Unterraum des* $\mathbb{R}^n$

Beweis: i) es ist zu zeigen, dass $0 \in \mathrm{Ker}(A)$: das gilt da $A \cdot 0 = 0$

ii) $u, v \in \mathrm{Kern}(A)$, zu zeigen: $u+v \in \mathrm{Ker}(A)$:

es gilt: $A \cdot u = A \cdot v = 0$. $A(u+v) = \underbrace{A \cdot u}_{=0} + \underbrace{A \cdot v}_{=0} = 0$, $\Rightarrow u+v \in \mathrm{Ker}(A)$.

iii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathrm{Ker}(A)$.

Es ist zu zeigen $\alpha \cdot u \in \mathrm{Ker}(A)$.

$A(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \overbrace{(A \cdot u)}^{=0} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot u \in \mathrm{Ker}(A)$ $\boxtimes$

Basis eines Unterraums

Definition

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Eine Basis von H ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq H$ mit

$$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = H$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = H \boxed{\subseteq} \mathbb{R}^2$.

$=$

Der Unterraum H ist $\mathbb{R}^2$ selbst.

Basis von H?

- $\{v_1, v_2\}$
- $\{v_1, v_3\}$
- $\{v_2, v_3\}$

Basis von $\ker(A)$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Kern}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underline{A \cdot x = 0} \}$$

Erweiterte Koeff. matrix.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

x_4 frei.

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -7x_4 \\ 3 \cdot x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} ; \; x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis von Kern(A)

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

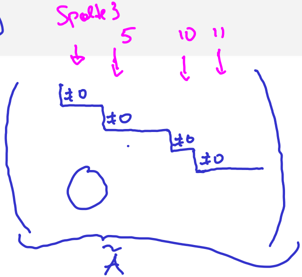
Basis von $\mathrm{col}(A) = \{ A\cdot x : x \in \mathbb{R}^n \}$

$A x = b$

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{überführen in Zeilenstuf.f.}}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots & & a_n \end{pmatrix}$$



in diesem Bsp. 4 Pivotspalten.

Basis von $\mathrm{col}(A) = \{ a_3, a_5, a_{10}, a_{11} \}$

WARUM?:

1.) lin. unabh. denn die entsprechenden Spalten in $\tilde{A}$ sind offensichtlich lin. unabh.

2.) $\mathrm{span}\{a_3, a_5, a_{10}, a_{11}\} = \mathrm{col}(A)$

da $A\cdot x = b$ lösbar $\Leftrightarrow$ $\exists x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = 0$ $\forall$ i frei und $A\cdot x = b$

Noch einmal Basis von col(A)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 11 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis von Col(A)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

~~Noch einmal Basis von col(A)~~

<u>Definition:</u> $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ sind die Vektoren

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-te Komponente.}$$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ heißt <u>Standardbasis</u> des $\mathbb{R}^n$

Koordinaten

- $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ Basis des Unterraums $H \subseteq \mathbb{R}^n$
- $u \in H$ ist *eindeutig* durch Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ mit

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p$$

festgelegt.

Koordinaten

Definition

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ eine Basis des Unterraums H und sei $x \in H$. Die *Koordinaten* von x bzgl. $\mathcal{B}$ sind die Gewichte $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ mit

$$x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_p b_p.$$

$$H = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Der Vektor

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = x$$

heisst *Koordinatenvektor* von x bzgl. $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$B = \{b_1, b_2\}$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein wichtiger Satz

Vorgriff: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ $\{p_1, \dots, p_q\}$ Basis von H

$\dim(H) = q$

Satz 24

Seien $\{v_1, .., v_p\}$ *linear unabhängig und* $v \notin \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$, *dann ist* $\{v_1, \dots, v_p, v\}$ *linear unabhängig.*

Beweis: Annahme $\{v_1, \dots, v_p, v\}$ linear abhängig. Dann existieren

$\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha \in \mathbb{R}$ nicht alle $= 0$ mit

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha \cdot v \qquad (*)$$

Kann $\alpha = 0$ sein? Nein, denn sonst wären $v_1, \dots, v_p$ lin. abhäng

teile $(*)$ auf beiden Seiten durch $-\alpha$ $+v$ auf b.S. zu

$$\Rightarrow \quad -v - \frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha} \cdot v_p = 0 \iff v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot v_1 - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha} \cdot v_p$$

$\{0\}$ ist echte Teilmenge von H.

$\{0\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_p\}$

Satz 25 $\{0\} \subsetneq$

$1 \cdot 0 = 0$

Ein Unterraum $H \subseteq \mathbb{R}^n$ hat eine Basis.

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq H$, lin. unabh. mit $\underbrace{p \quad \text{maximal}}$ (am größten)

Da $\{0\} \subsetneq H$ gilt insbesondere $p \geq 1$.

Behauptung: $\{v_1, \dots, v_p\}$ ist Basis von H.

Annahme: $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_p\} \subsetneq H. \Rightarrow \exists v \in H$ mit

echte Teilmenge

$v \notin \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_p\} \overset{\text{Satz 24}}{\Longrightarrow} \{v_1, v_2, \dots, v_p, v\}$ lin. unabh.

Satz 26

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ und $\{c_1, \ldots, c_l\}$ zwei Basen von H. Dann gilt $\boxed{k = l.}$
Jede Basis von H hat also immer gleich viele Elemente.

Beweis: Wir nehmen an, dass $k < l$ und erhalten dann einen Widerspruch. Also muss dann $k \geq l$ gelten. Aus Symmetriegründen gilt dann auch $k \leq l$ und somit $k = l$.

Also nehmen wir an, dass $k < l$ gilt. Da $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis ist, können wir jedes c_j als Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{B}$ schreiben:

$$[c_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

Interpretieren wir nun diese Vektoren als Spalten einer Matrix:

Satz 26

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ und $\{c_1, \ldots, c_l\}$ zwei Basen von H. Dann gilt $k = l$.
Jede Basis von H hat also immer gleich viele Elemente.

$$A = \begin{bmatrix} [c_1]_B & [c_2]_B & \cdots & [c_l]_B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kl} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times l}$$

Da A mehr Spalten als Zeilen hat, sind die Spalten von A linear abhängig.

D.h. es existiert ein $x \in \mathbb{R}^l$, $x \neq 0$ mit $A \cdot x = 0$

Es folgt: $x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_l \cdot c_l = x_1 \cdot (a_{11} b_1 + \cdots + a_{k1} b_k) + \cdots + x_l \cdot (a_{1l} b_1 + \cdots + a_{kl} b_k)$

$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1l}x_l)}_{=0} \cdot b_1 + \cdots + \underbrace{(a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kl}x_l)}_{=0} \cdot b_k$$

↯

Satz 26

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ und $\{c_1, \ldots, c_l\}$ zwei Basen von H. Dann gilt $k = l$.
Jede Basis von H hat also immer gleich viele Elemente.

Dies ist ein Widerspruch zu $\{c_1, \ldots, c_l\}$ Basis,

denn aus $x_1 c_1 + \ldots + x_l c_l = 0$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \neq 0$

folgt dass $\{c_1, \ldots, c_l\}$ linear abhängig.

Dimension

Definition

Die *Dimension* eines Unterraums $H \neq \{0\}$, $\dim(H)$ ist die Anzahl von Vektoren in einer Basis von H.

Die Dimension des Unterraums $\{0\}$ ist 0.

Beispiel

- $H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$

$\mathrm{Dim}(H) = 2.$

Rang einer Matrix

Definition

Der *Rang* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Dimension von $\operatorname{col}(A)$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

<u>Merken!</u>: $\dim(\operatorname{col}(A))$ = Anzahl Pivotspalten in A.

Pivotspalten.

überführen in ZSF:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\operatorname{col}(A)) = 3$

Rang und Basisvariablen

Satz 27

Der Rang einer Matrix A ist die Anzahl der Pivotspalten in einer Zeilenstufenform von A.

Dimension von Bild und Kern

Satz 28

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Es gilt* $\mathrm{Rang}(A) + \dim(\ker(A)) = n$.

Basissatz

Satz 29

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein p-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Es gilt

a) *Eine p-elementige Teilmenge $\{h_1, \ldots, h_p\} \subseteq H$ linear unabhängiger Vektoren aus H ist eine Basis von H.* und linear unabhängigen !!!

b) *Wenn das Erzeugnis einer p-elementigen Teilmenge H ist, dann ist diese Menge eine Basis von H.*

Ergänzung zu Satz 19

Satz 19 (Ergänzung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent zur Eigenschaft, dass A invertierbar ist.

m) Die Spalten von A sind eine Basis des $\mathbb{R}^n$

n) $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$

o) $\mathrm{Rang}(A) = n$

p) $\ker(A) = \{0\}$

q) $\dim(\ker(A)) = 0$