Heute (15.10.2013):

- Textbuch Kapitel 2.5, 2.4, 2.8
- Ein Algorithmus zur Berechnung der LU-Faktorisierung
- Block Matrizen
- Unterräume

Ein Algorithmus zur LU-Zerlegung

- Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Starte mit $L = I_m$
- Reduziere A in Zeilenstufenform durch eine Folge von Ersetzungsoperationen (Typ 1 aus erster Vorlesung).
- Platziere Einträge in L, sodass die *selben* Operationen angewandt auf L am Ende I_m ergeben.

Beispiel

+2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

erste Spalte von L

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

elem. Zeilenop.
Typ 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\div 3$ $\quad$ $\div 2$

zweite Spalte von L

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dritte Spalte von L

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}}_{= U}$$

$\div 5$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}$$

letzte Spalte von L

Es gilt: $L \cdot U = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Blockmatrizen

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 9 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & -1 & 11 \\ \hline 2 & -2 & 3 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

2×3 Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Blockzerlegung

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 9 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

- Matrizen $A_{ij}, j = 1, \ldots, 3$ haben alle dieselbe Anzahl Zeilen (für festes i)
- Matrizen $A_{ij}, i = 1, \ldots, 3$ haben alle dieselbe Anzahl Spalten (für festes j)

$$\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

haben gleiche Anz. Spalten

Addition von Blockmatrizen

- $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auf dieselbe Art und Weise Zerlegt
- $A + B$ ergibt sich aus der Summe der jeweiligen Blöcke

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 11 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 3 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 3 & 0 & 9 & 7 & 7 \\ 9 & 10 & 14 & 9 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 10 & 8 & 11 \end{array}\right)$$

Multiplikation von Blockmatrizen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}$$

Spalten in A sind so partitioniert, wie Zeilen in B !

Beispiel:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Die Spalten-Zeilen Erweiterung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a + 3c + 2e & b + 3d + 2f \\ 3a - c + 2e & 3b - d + 2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3a & 3b \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2e & 2f \\ 2e & 2f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix}$$

Die Spalten-Zeilen Erweiterung

(column)

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann bezeichnet $\mathrm{col}_j(A)$ die j-te Spalte von A und $\mathrm{row}_i(A)$ die i-te Zeile von A.

Satz 28

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dann gilt

$$A \cdot B = \mathrm{col}_1(A) \cdot \mathrm{row}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A) \cdot \mathrm{row}_n(B)$$

Inverse partitionierter Matrizen

$$(*)\quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \underset{\in \mathbb{R}^{q\times p}}{0} & I_q \end{pmatrix}$$

Beispiel: Eine Matrix A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ist in *oberer Block-Dreiecksform*. Wir nehmen an $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $A_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$.

Sei nun A invertierbar. Wie sieht A^{-1} aus?

Aus $(*)$ leiten wir ab

i) $B_{11} \cdot A_{11} + B_{12} \cdot 0 = I_p \iff B_{11} \cdot A_{11} = I_p \Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1}$, insbesondere ist A_{11} invertierbar

ii) $B_{21} \cdot A_{11} + B_{22} \cdot 0 = 0 \iff B_{21} \cdot A_{11} = 0$

$\Rightarrow B_{21} \cdot A_{11} \cdot A_{11}^{-1} = B_{21} \cdot I_p = B_{21} = 0 \cdot A_{11}^{-1} = 0$

iii) $B_{21} \cdot A_{12} + B_{22} \cdot A_{22} = I_q \Rightarrow B_{22} \cdot A_{22} = I_q \Rightarrow B_{22} = A_{22}^{-1}$ (A_{22} invertierbar)

iv) $B_{11} \cdot A_{12} + B_{12} \cdot A_{22} = 0 \Rightarrow B_{12} \cdot A_{22} = - A_{11}^{-1} A_{12} \Rightarrow B_{12} = - A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot A_{22}^{-1}$

Inverse partitionierter Matrizen

Beispiel: Eine Matrix A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ist in *oberer Block-Dreiecksform*. Wir nehmen an $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und $A_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$.
Sei nun A invertierbar. Wie sieht A^{-1} aus?

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Unterräume

Definition

Ein *Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge $H \subseteq \mathbb{R}^n$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i) Der Nullvektor 0 ist ein Element von H.
ii) Für alle $u, v \in H$ gilt $u + v \in H$
iii) Für alle $u \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot u \in H$.

Beispiel

- Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$
- Sei $H = \mathrm{Span}\{u, v\}$
- H ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$

i) $0 \in H$? : $\quad 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot v \in \mathrm{span}\{u, v\} = H$

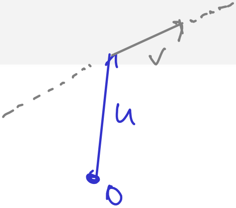
ii) $x, y \in H \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ mit $x = \alpha_1 u + \beta_1 v \quad y = \alpha_2 u + \beta_2 v$

$$x + y = (\alpha_1 + \alpha_2) u + (\beta_1 + \beta_2) v \Rightarrow x + y \in H$$

iii) $x \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $x = \beta \cdot u + \gamma \cdot v$

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot \beta) \cdot u + (\alpha \cdot \gamma) \cdot v \in H$$

Beispiel 2



- Seien $u \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beide $\neq 0$
- Wann ist $\underbrace{\{u + \alpha \cdot v \colon \alpha \in \mathbb{R}\}}_{= H}$ ein Unterraum?

Aus $0 \in H \Rightarrow \exists \alpha \quad 0 = u + \alpha \cdot v \Rightarrow u, v$ linear abhängig

$\Rightarrow$ notwendige Bedingung: u, v lin. abhängig.

hinreichend? Ja!

u, v lin. abhängig $\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \quad u = \gamma \cdot v \Rightarrow H = \{u + \alpha \cdot v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$= \{(\gamma + \alpha) \cdot v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\beta \cdot v \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Unterraum des $\mathbb{R}^n$ erzeugt durch v (Gerade)

Beispiel

- $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$
- $H = \mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_p\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^n$, der von $u_1, \dots, u_p$ *erzeugt* wird.

Ja. Geht genauso wie für $\mathrm{span}\{u, v\}$.

Spaltenraum

Definition

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$.
Der *Spaltenraum* ist das Erzeugnis der Spalten von A

$$\mathrm{Col}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Bemerkung: $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$.

Beispiel

Ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$? Ja.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \text{lösen!} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

GLS hat Lösung