Heute (08.10.2013):

- Textbuch Kapitel 2.2, 2.5, 2.3
- Elementare Matrizen
- Die Umkehrabbildung
- Die LU-Faktorisierung
- Ein Algorithmus zur Berechnung der LU-Faktorisierung
- Block Matrizen

Elementare Matrizen

Erinnerung: Elementare Zeilenoperationen

i) Vertauschen zweier Zeilen
ii) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$
iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile.

Vertauschen von Zeile i und k

V_{ik}

Die Inverse von $V_{(i,k)}$

Multiplikation der i-ten Zeile mit $\alpha \neq 0$

$S_{(i,\alpha)}$

Die inverse von $S_{(i,\alpha)}$

Zeile i= Zeile i + $\alpha\cdot$ Zeile k, $i \neq k$

$A_{(i+\alpha k)}$

Die Inverse von $A_{(i+\alpha k)}$

Nacheinanderausführen von elementaren Zeilenoperationen

- Auf $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ werden Operationen $O_1, \ldots, O_k$ ausgeführt (in dieser Reihenfolge)
- Das Ergebnis ist $Erg \in \mathbb{R}^{?}$
- Seien $E_{O_1}, \ldots, E_{O_k} \in \mathbb{R}^{?}$ die elementaren Matrizen, die zu $O_1, \ldots, O_k$ gehören.

Dann ist

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Die LU-Zerlegung

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen 1 und $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in Zeilenstufenform. Dann heißt die Faktorisierung

$$A = L \cdot U$$

LU-Zerlegung von A.

LU-Zerlegung und Lösen von Gleichungssystemen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ein Algorithmus zur LU-Zerlegung

- Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Starte mit $L = I_m$
- Reduziere A in Zeilenstufenform durch eine Folge von Ersetzungsoperationen (Typ 1 aus erster Vorlesung).
- Platziere Einträge in L, sodass die *selben* Operationen angewandt auf L am Ende I_m ergeben.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Blockmatrizen

Beispiel einer 2×3 Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

Blockzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Matrizen $A_{ij}, j = 1, \ldots, 3$ haben alle dieselbe Anzahl Zeilen
Matrizen $A_{ij}, i = 1, \ldots, 3$ haben alle dieselbe Anzahl Spalten

Addition von Blockmatrizen

- $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auf dieselbe Art und Weise Zerlegt
- $A + B$ ergibt sich aus der Summe der jeweiligen Blöcke

Multiplikation von Blockmatrizen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}$$

Spalten in A sind so partitioniert, wie Zeilen in B !

Die Spalten-Zeilen Erweiterung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

Die Spalten-Zeilen Erweiterung

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann bezeichnet $\operatorname{col}_j(A)$ die j-te Spalte von A und $\operatorname{row}_i(A)$ die i-te Zeile von A.

Satz 27

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dann gilt

$$A \cdot B = \operatorname{col}_1(A) + \operatorname{row}_1(B) + \cdots + \operatorname{col}_n(A) \cdot \operatorname{row}_n(B)$$