Heute (01.10.2013):

- Textbuch Kapitel 1.8, 1.9
- Lineare Abbildungen
- Wichtige Eigenschaften
- Die Matrix einer linearen Abbildung
- Beispiele

Abbildungen

Definition

Eine *Abbildung* oder *Funktion* T von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $T(x) \in \mathbb{R}^m$ zuweist.

- $\mathbb{R}^n$ ist die *Definitionsmenge*
- $\mathbb{R}^m$ ist die *Zielmenge*
- $T(x)$ is das *Bild* von x
- $\{T(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ heißt *Bildmenge*

Beispiel:
$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Lineare Abbildung

Definition

Eine Funktion $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist *linear*, wenn

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

ii) $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^n$.

$T(x) = A\,x$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann ist $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $T(x) = Ax$ eine lineare Abbildung.

Verträglichkeit mit Multiplikation und Addition

Beobachtung

Wenn $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt mit Vektoren $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ und Skalaren $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p).$$

$$T(x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n) = x_1 \cdot \underbrace{T(e_1)}_{\in \mathbb{R}^m} + \dots + x_n \cdot \underbrace{T(e_n)}_{\in \mathbb{R}^m}$$

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{\left(T(e_1), \dots, T(e_n)\right)}^{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Basis

Definition

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Basis (des $\mathbb{R}^n$)*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = \mathbb{R}^n$, d.h, für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ gibt es Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ mit

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p.$$

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

2. $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ist linear unabhängig.

Bsp. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ BASIS DES $\mathbb{R}^2$?

$\text{SPAN}(B) = \mathbb{R}^2$ ABER $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist LK der anderen Vektoren.

$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiele

4 Vektoren aus $\mathbb{R}^3$: $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$

$A = (v_1 \cdots v_4)$. (*) $A \cdot x = 0$

$v_1, \dots, v_4$ lin. unabh.

$\Leftrightarrow$ $x = 0$ einzige Lsg von (*)

4 Spalten

red. Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} \cdot & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ 3 Zeilen $\Rightarrow$ nicht in jeder Spalte Pivotposition.

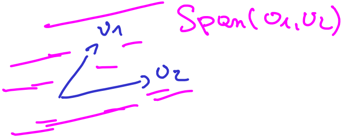
$\Rightarrow$ ∞-viele LSG von $Ax = 0$

Beispiele

2 Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$: **BASIS?** Nein.

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1+2\cdot\alpha_2\\3\cdot\alpha_2\\2\cdot\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix} : \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$$

Sei $A=(v_1\ v_2)$



$\mathrm{Span}\{v_1,v_2\}=\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall b\in\mathbb{R}^3$ ist

(*) $A\cdot x = b$ lösbar. $x\in\mathbb{R}^2$

ERWEITERTE KOEFFIZIENTEN MATRIX transformiert in Zeilenstufenform.

$$\text{3 Zeilen}\left\{\left(\overbrace{A'}^{\text{2 Spalten}} \;\middle|\; b'\right)\right.$$

Letzte Zeile von A' ist Nullzeile. $\Rightarrow$ mit $b'=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist $A'\cdot x=b'$ nicht lösbar. Durch Umkehroperationen der elementaren Zeilentransformationen erhält man b mit (*) nicht lösbar.

$\Rightarrow \mathrm{Span}(v_1,v_2) \neq \mathbb{R}^3$

Ein Satz zu Basen

Satz

$\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Basis, wenn

- $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = \mathbb{R}^n$ und
- $p = n$

$\Leftrightarrow$

- $p = n$
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig

Lineare Abbildungen und Basen

Satz

Sei $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge von Vektoren dessen Erzeugnis $\mathbb{R}^n$ ist. Eine lineare Abbildung $T(x)$ ist durch die Bilder

$$T(v_i),\, 1 \leqslant i \leqslant p$$

eindeutig festgelegt.

Ist jede lineare Abbildung von der Form Ax? ← lineare Abbildung

Sei $e_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$ der Vektor

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Komponente.}$$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

$$\underbrace{\underset{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\overset{e_1}{\shortparallel}}, \underset{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\overset{e_2}{\shortparallel}}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = e_3}_{\text{BASIS DES } \mathbb{R}^3}$$

$$\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = \underset{3}{x_1} e_1 + \underset{5}{x_2} e_2 + \underset{7}{x_3} e_3$$

Sei nun $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n) =$$

Die Matrix einer linearen Abbildung

Satz

Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Es gibt genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Matrix ist

$$A = (T(e_1) \cdots T(e_n))$$

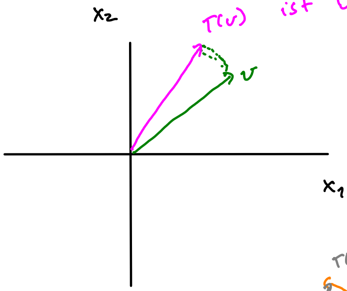
Definition

Die Matrix A von oben heißt *Standardmatrix* der lineare Abbildung T.

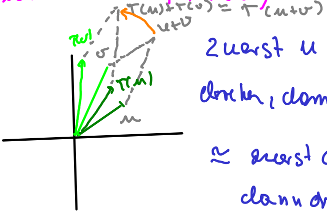
Drehung

Eine Drehung um den Winkel ϕ im $\mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung.

$T(v)$ ist Drehung um den Winkel φ

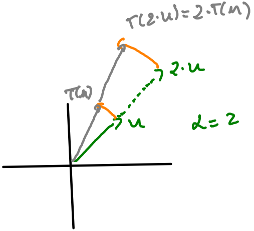


- $T(u+v) = T(u) + T(v)$



zuerst u und v drehen, dann aufaddieren

$\simeq$ zuerst aufaddieren dann drehen.



$\alpha = 2$

- $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$

Drehung

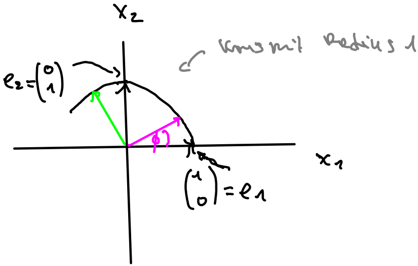
Eine Drehung um den Winkel ϕ im $\mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung.

Was ist die Standardmatrix der Drehung um ϕ ?

$\phi \in [0, 2\pi]$

$$\begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \right)$$



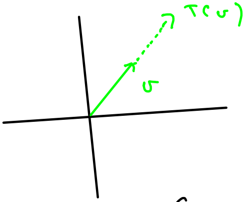
Matrixform der Drehung

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$

Stauchung/Streckung

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = \alpha \cdot x$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

z.B.: $n=2$. $\alpha=2$. $\quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$



<u>Standardmatrix:</u>

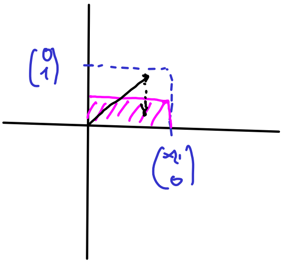
$$T(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) \cdots T(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$$

Horizontale/Vertikale Stauchung/Streckung



$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\\alpha\cdot x_2\end{pmatrix}$$

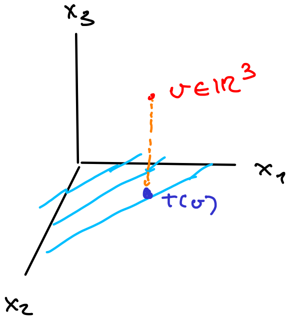
Stauchung vertikal : α $0<\alpha<1$

Streckung vertikal : $1<\alpha$

Standardmatrix: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \alpha\end{pmatrix}$ (vertikal)

Projektion

$$T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Standardmatrix:

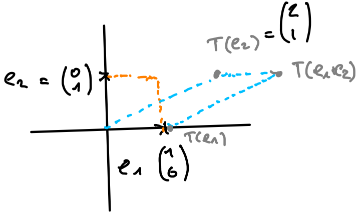
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3} \Big\} 3$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

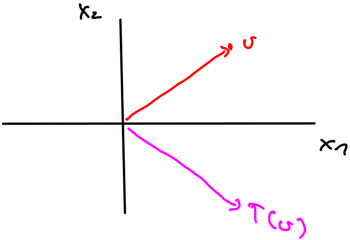


$\alpha = 2$

Standardmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x_1-Achse

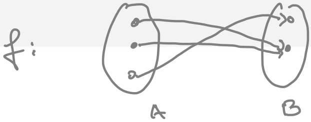


$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Standardmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Surjektiv



Definition

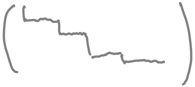
Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist *surjektiv*, wenn jedes $b \in \mathbb{R}^m$ das Bild mindestens eines $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

$T(x) = A \cdot x$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist surjektiv

$\iff$ $\forall b \in \mathbb{R}^m$ ist $A \cdot x = b$ lösbar

$\iff$ $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\} = \mathbb{R}^m$

$\iff$ In jeder Zeile von A ist Pivotposition



$\leftarrow$ keine Nullzeile.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

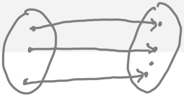
in jeder Zeile
ist Pivotpos.

$T(x) = A \cdot x$ surjektiv.

$\Rightarrow$ $T(x)$ ist surjektiv.

Injektiv

$f:$



$A \longrightarrow B$

Definition

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist *Injektiv*, wenn jedes $b \in \mathbb{R}^m$ das Bild höchstens eines $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

WANN ist $T(x) = A \cdot x$ injektiv. $A = (a_1 \dots a_n)$

$\Leftrightarrow$ in jeder Spalte von A ist pivotposition. $A \to$ Zeilenstufenform.

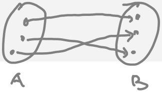
$\Leftrightarrow$ Spalten von A sind linear unabhängig.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$A \cdot x$ injektiv? nein, denn $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ linear abhängig.

Bijektiv



Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

$T(x) = A \cdot x$ ist bijektiv. $\Longleftrightarrow$

- Spalten von A erzeugen $\mathbb{R}^m$
- Spalten von A sind linear unabhängig

$\Longleftrightarrow$ Spalten von A sind Basis des $\mathbb{R}^m$ und $n = m$

Satz

Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit Standardmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar.

i) T is surjektiv genau dann wenn die Spalten von A $\mathbb{R}^m$ erzeugen.

ii) T ist injektiv genau dann wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.

iii) T ist bijektiv, genau dann, wenn die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$ sind.

Beispiel

$$T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$ ist eine injektive lineare Abbildung, denn

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$

$T(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

lin. unabhängig.!

Beispiel

$T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$ ist eine injektive lineare Abbildung, denn

Beispiel

$$T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$ ist eine injektive lineare Abbildung, denn