Lineare Algebra

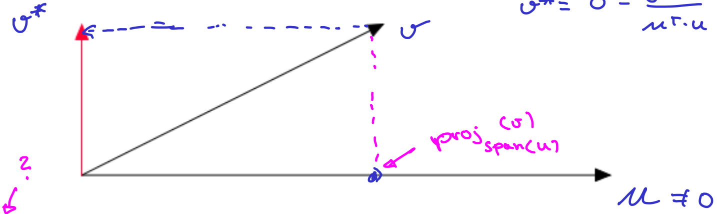
Heute (28.11.2013):

- Textbuch Kapitel 6.4, 6.5
- Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren
- Problem der kleinsten Quadrate (least squares)

Orthogonale Projektion

$$\langle v^*, u\rangle = v^{*T}\cdot u = v^{*T}\cdot u$$

$$v^* = v - \frac{v^T\cdot u}{u^T\cdot u}\cdot u$$



?

$$v^* = v - \lambda\cdot u$$

$$\langle v^*, u\rangle = 0 \iff \langle v - \lambda\cdot u, u\rangle = 0$$

$$\iff \langle v, u\rangle - \lambda\underbrace{\langle u, u\rangle}_{>0} = 0$$

$$\lambda = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}$$

$$v^{*T}\cdot u = 0 \iff$$

$$(v - \lambda\cdot u)^T\cdot u = 0$$

$$\iff v^T\cdot u - \lambda\cdot u^T\cdot u = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{v^T\cdot u}{u^T\cdot u}$$

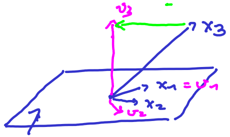
Das Gram-Schmidt Verfahren

- Gegeben: Linear unabhängige $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$
- Ziel: Berechne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ mir den folgenden Eigenschaften
  - i) $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ immer wenn $i \neq j$
  - ii) Für alle $\ell \in \{1, \dots, p\}$ gilt

$$\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\ell\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$$

$v_3 = x_3 - u$, wobei $u \in \text{span}\{v_1, v_2\}$

$v_3 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}^\perp$



$\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{x_1, x_2\}$

Wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j$ bestimmt sind ...

Frage: Wie bekommen wir nun v_{j+1}.

- Die $\mathbf{v}_i$ sind orthogonal
- Für $\ell \in \{1, \ldots, j\}$ gilt

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\ell\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$$

$v_3 = x_3 - \lambda_1 \cdot v_1 - \lambda_2 \cdot v_2$

$\langle v_3, v_1 \rangle = 0$

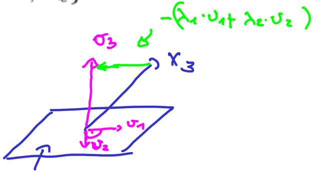
$\Leftrightarrow (x_3 - \lambda_1 \cdot v_1 - \lambda_2 \cdot v_2)^T \cdot v_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_3^T \cdot v_1 - \lambda_1 \cdot v_1^T v_1 \underbrace{- \lambda_2 \, v_2^T \cdot v_1}_{=0} = 0$

$\Leftrightarrow x_3^T \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1^T \cdot v_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{x_3^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1}$

genauso:

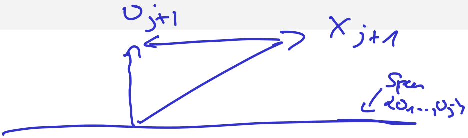
$\lambda_2 = \dfrac{x_3^T \cdot v_2}{v_2^T \cdot v_2}$



$\operatorname{Span}\{v_1, v_2\} = \operatorname{Span}\{x_1, x_2\}$

$\operatorname{Span}\{v_1\} = \operatorname{Span}\{x_1\}$

Wenn $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$ bestimmt sind ...



- Die $\mathbf{v}_i$ sind orthogonal
- Für $\ell \in \{1, \dots, j\}$ gilt

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\ell\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$$

Es soll gelten: $v_{j+1} = x_{j+1} - \overset{?}{\lambda_1} \cdot v_1 - \lambda_2 \cdot v_2 - \dots - \overset{?}{\lambda_j} \cdot v_j$

Dann gilt: $\forall \ell \in \{1, \dots, j+1\}: \operatorname{Span}\{x_1, \dots, x_\ell\} = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_\ell\}$

Wir wollen noch: $v_{j+1} \perp v_\ell \ \forall \ell \in \{1, \dots, j\}$.

Also $v_{j+1}^T \cdot v_\ell = 0 \iff (x_{j+1} - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_j v_j)^T \cdot v_\ell = 0$

$$\iff \lambda_\ell = \frac{x_{j+1}^T \cdot v_\ell}{v_\ell^T \cdot v_\ell}$$

Das Gram-Schmidt Verfahren

Satz 77

Seien $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ *eine Basis eines Unterraums* W *von* $\mathbb{R}^n$*. Wir definieren*

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2$
- $\vdots$
- $\mathbf{v}_p = \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \cdots \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \cdot \mathbf{v}_{p-1}} \mathbf{v}_{p-1}.$

$v_2 = x_2 - \frac{x_2^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1} \cdot v_1$

Dann ist $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ *eine orthogonale Basis von* W *und für alle* $\ell \in \{1, \dots, p\}$ *gilt*

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\ell\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}.$$

$x_1, \dots, x_p$.

$A = (x_1 \dots x_p) = (v_1\, v_2 \dots v_p) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \\ 0 & 1 & \lambda_{23} & \\ \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$

$v_1 = x_1$

$v_2 = x_2 - \frac{x_2^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1} \cdot v_1 \iff x_2 = \underbrace{\frac{x_2^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1}}_{\lambda_{12}} \cdot v_1 + v_2$

$v_3 = x_3 - \underbrace{\frac{x_3^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1}}_{= \lambda_{13}} \cdot v_1 - \underbrace{\frac{x_3^T \cdot v_2}{v_2^T \cdot v_2}}_{= \lambda_{23}} \cdot v_2$

$x_3 = \lambda_{13} \cdot v_1 + \lambda_{23} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$

$B = (b_1, \dots, b_k)$

$A \cdot B$

$(A \cdot b_1, A \cdot b_2, \dots, A \cdot b_k)$

$\Rightarrow$ Gram-Schmidt Verfahren berechnet für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ mit vollem Spaltenrang eine Matrix $\tilde{Q}$, deren Spalten orthogonal sind und $R \in \begin{pmatrix} 1 & \ddots & \lambda_{ij} \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ obere D.M.

mit $A = \underset{\mathbb{R}^{n \times p}}{\underset{\Uparrow}{\tilde{Q}}} \cdot \underset{\mathbb{R}^{p \times p}}{\underset{\Uparrow}{R}}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \underset{\mathbb{R}^{4\times 3}}{\underset{\Uparrow}{\tilde{Q}}} \cdot \underset{\mathbb{R}^{3\times 3}}{\underset{\Uparrow}{\begin{pmatrix} 1 & \ddots & \mu's \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}}$$

Spalten von Q sollen orthog. sein.

$$x_1 = v_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1} \cdot v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 1 & 1/4 & -2/3 \\ 1 & 1/4 & 1/3 \\ 1 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1} \cdot v_1 - \frac{x_3^T \cdot v_2}{v_2^T \cdot v_2} \cdot v_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Die QR-Zerlegung

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 1 & 1/4 & -2/3 \\ 1 & 1/4 & 1/3 \\ 1 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Satz 78

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten. Dann kann A in der Form

$$A = Q \cdot R$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

faktorisiert werden, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit orthonormalen Spalten und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit echt positiven Diagonaleinträgen ist.

$* \frac{2}{\sqrt{3}}$

Bemerkung: Die Spalten von Q sind eine orthonormale Basis von $\mathrm{Col}(A)$

$* \sqrt{3/2}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \cdot \tilde{R}$$

Beispiel

Berechne die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kleinste Quadrate

a^i : i-te Zeile von A

Definition

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Eine Lösung des *Problems der kleinsten Quadrate* ist ein $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

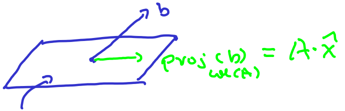
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b_i - a^i \hat{x})^2}$$

$$\|b - A\hat{x}\| \leqslant \|b - Ax\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Motivation: GLS $Ax = b$ nicht lösbar. ($b \notin Col(A)$)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Finde das (in gewissem Sinne) beste $\hat{x}$



$Col(A) = \{A\cdot x : x \in \mathbb{R}^n\}$

Lösung des Problems der kleinsten Quadrate

- Berechne $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(\mathbf{b})$
- Löse $Ax = \hat{\mathbf{b}}$

Erinnerung: $\hat{b}$ ist der zu b nächste Punkt bzgl. $\|\cdot\|$ zu b.

$b-\hat{b}$ ist senkrecht auf allen Spalten von A.

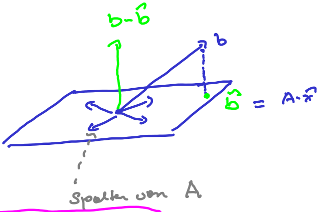
$\hat{b} = A\cdot\hat{x}$ mit geeignetem $\hat{x}$.

$\forall\, a_i$: Spalte von A.

$$a_i^T \cdot (\overbrace{b - A\cdot\hat{x}}^{=b-\hat{b}}) = 0$$

$$\Rightarrow A^T\cdot(b - A\cdot\hat{x}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{A^T\cdot b = A^T\cdot A\cdot\hat{x}}$$

$\Rightarrow$ d.h. gesucht $\hat{x}$ ist Lösung des GLS. $A^T\cdot A\cdot\hat{x} = A^T\cdot b$



Andere Lsg. x^{**}

$\hat{b} = A\cdot x^{**}$

Lösung des Problems der kleinsten Quadrate

Satz 79

Die Menge der Lösungen des Problems der kleinsten Quadrate ist die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$A^T Ax = A^T b$$

Beispiel

- Finde eine Lösung des P.d.k.Q. für $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 17 & 1 & 19 \\ 1 & 5 & 11 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 11 \\ & 1 & 2 \\ 0 & \cancel{-84} & \cancel{-168} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad x = (1, 2)$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wann existiert eine eindeutige Lösung

Satz 80

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) *Das Problem der kleinsten Quadrate hat für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung.*

b) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

c) *Die Matrix $A^T A$ ist invertierbar.*

Der Fehler

Definition

Der *Fehler des kleinste Quadrate Problems* für $Ax = b$ ist

$$\|b - \mathbf{proj}_{\mathrm{Col}(A)} b\|$$

Beispiel:
Betrachte das Beispiel von vorher:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Der Fehler des k.Q.P. ist:

Das k.Q.P. und die QR-Zerlegung

Das k.Q.P. und die QR-Zerlegung

Satz 81

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit linear unabhängigen Spalten und sei $A = QR$ eine QR-Faktorisierung von A, wie in Satz 78. Dann ist die eindeutige LÖsung des k.Q.P. für $Ax = b$

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T b.$$

Beispiel

Finde die Lösung des k.Q.P. für $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Finde die Lösung des k.Q.P. für $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$