

Heute (21.11.2013):

- ▶ Textbuch Kapitel 6.1, 6.2
- ▶ Skalarprodukt, Norm, Kosinussatz
- ▶ Orthogonalität, Orthonormale Basen, Projektion

Skalarprodukt

Definition

Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das *Skalarprodukt* von u und v definiert durch

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Alternativ schreibt man manchmal auch $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Bsp: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 12$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Satz 47

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

iii) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ genau dann wenn $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Beweis: i) - iii) folgt direkt aus der Definition des Skalarprodukts

iv)
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

and
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow u_i = 0, \text{ d.h. } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$



Norm

(„Länge“)

Definition

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die *Norm* von v :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

Ist $\|\mathbf{v}\| = 1$ nennt man $\mathbf{v}$ einen *Einheitsvektor*.

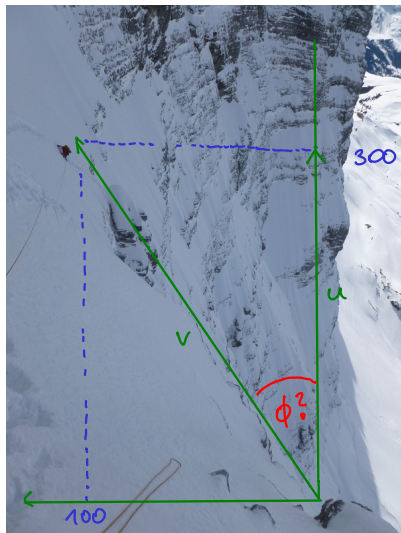
Satz 48

Für $c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$.

Also ist jeder Vektor $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ ein Einheitsvektor (*Normalisierung*).

$$\left\| \underbrace{\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}}_{\geq 0} \mathbf{v} \right\| = \underbrace{\left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right|}_{\geq 0} \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1, \text{ also Einheitsvektor.}$$

Beispiel Projektion/Kosinussatz



Kosinussatz im $\mathbb{R}^n$: $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \phi$$

↑
eingeschlossener Winkel
zwischen u und v

Bsp

$$v = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = 300 \quad \|v\| = \sqrt{300^2 + 100^2} = 100\sqrt{10}$$

$$u \cdot v = 300^2$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{300^2}{300 \cdot 100\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\Rightarrow \phi \approx 18^\circ$$

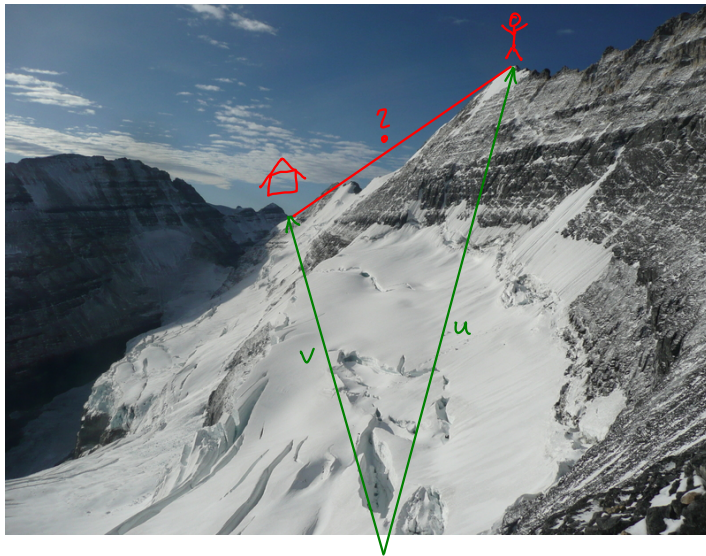
Distanz

Definition

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist die *Distanz* zwischen u und v

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Beispiel Distanz



$$\text{Gipfel: } \begin{pmatrix} 300 \\ 1000 \\ 300 \end{pmatrix} = u$$

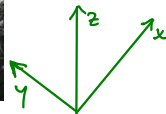
$$\text{Hütte: } \begin{pmatrix} 250 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

Distanz (Luftlinie)
zw. Gipfel und Hütte

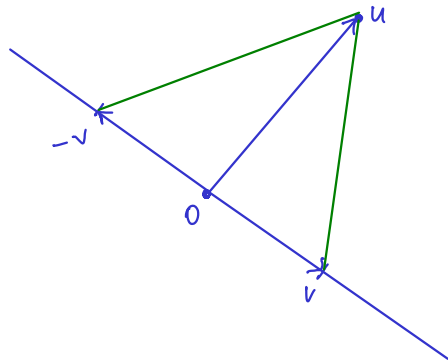
$$\left\| \begin{pmatrix} 300 \\ 1000 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 250 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 50 \\ 1000 \\ 300 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{50^2 + 1000^2 + 300^2}$$

$$\approx 1045$$



Motivation Orthogonalität



Wanted: $\|u - v\| = \|u - (-v)\| = \|u + v\|$

$$\|u - v\|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$$

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$$

$$\Rightarrow \|u - v\| = \|u + v\| \text{ genau dann, wenn}$$

$$u \cdot v = 0$$

↑
Motivation für Def.
von Orthogonalität

Orthogonalität

Definition

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heissen *orthogonal* zueinander wenn

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Satz 49

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sind orthogonal zueinander genau dann wenn gilt

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

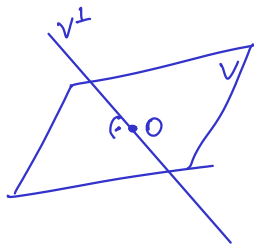
Folgt direkt aus der eben durchgeführten Rechnung

Orthogonales Komplement

Definition

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum. Die Menge aller Vektoren $u \in \mathbb{R}^n$ die orthogonal auf allen Vektoren in V stehen, heisst *Orthogonales Komplement* (oder *Orthogonalraum*) von V .

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \text{für alle } v \in V \text{ gilt } u \cdot v = 0\}$$



Eigenschaften Orthogonales Komplement

Satz 50

1. Sei $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. Dann ist $u \in V^\perp$ genau dann wenn u orthogonal zu allen $v_1, \dots, v_k$ ist.
2. $V^\perp$ ist ein Unterraum.

Beweis
1.)

$$v \in V : v = c_1 \cdot v_1 + \dots + c_k \cdot v_k$$

$$v \cdot u = c_1 \underbrace{v_1 \cdot u}_{=0} + \dots + c_k \underbrace{v_k \cdot u}_{=0} = 0$$

2) ✓

Bsp: $V \subseteq \mathbb{R}^3$

$$V = \mathbb{R}^3$$

Was ist $V^\perp$?

$$V^\perp = \{0\}$$

Beispiele für Orthogonales Komplement

Satz 51

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt

geht analog



$$(\text{row}(A))^{\perp} = \ker(A) \quad \text{und} \quad (\text{col}(A))^{\perp} = \ker(A^T).$$

Beweis: $(\text{row}(A))^{\perp} = \ker(A)$

$$x \in \ker(A) \Rightarrow A \cdot x = 0$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_m \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_i \cdot x = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1^T \\ \vdots \\ -a_m^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{row}(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_m\}$$

$$\Rightarrow x \in (\text{row}(A))^{\perp}$$

$$x \in (\text{row}(A))^{\perp} \Rightarrow a_i \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow A \cdot x = 0 \Rightarrow x \in \ker(A)$$



Orthogonale/Orthonormale Basis

Definition

Sei $M = \{u_1, \dots, u_k\}$ eine Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

- i) M ist eine **orthogonale** Menge, wenn für jedes Paar $u_i \cdot u_j = 0$ ($i \neq j$).
- ii) M ist eine **orthonormale** Menge, wenn sie orthogonal ist und alle u_i Einheitsvektoren sind.
- iii) M ist eine **orthogonale Basis**, wenn sie orthogonal ist und eine Basis ist.
- iv) M ist eine **orthonormale Basis**, wenn sie orthonormal ist und eine Basis ist.

Wie erzeugt man aus einer orthogonalen Basis eine orthonormale Basis?

$$u_i' = \frac{u_i}{\|u_i\|} \quad (\text{Normieren})$$

Projektion auf orthogonale Basis

Satz 52

Sei $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ eine orthogonale Basis des Unterraums $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Für jedes $\mathbf{v} \in V$ seien $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ die Gewichte in der Linearkombination

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_k \mathbf{u}_k.$$

← Eindeutig, weil $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ Basis ist

Dann sind die Gewichte bestimmt durch

$$c_j = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j} \quad (j = 1, \dots, k).$$

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j = \|\mathbf{u}_j\|^2$$

Beweis

$\{u_1, \dots, u_k\}$ orthogonale Basis von V

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k$$

$$v \cdot u_j = (c_1 u_1 + \dots + c_k u_k) \cdot u_j = \underbrace{c_1 u_1 \cdot u_j + \dots + c_j u_j \cdot u_j + \dots}_{=0 \text{ wegen Orthogonalität}} + c_k u_k \cdot u_j$$
$$= c_j u_j \cdot u_j$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{v \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} = \frac{v \cdot u_j}{\|u_j\|^2}$$

Das gilt insbesondere für alle $1 \leq j \leq k$.



Beispiel Projektion auf Orthogonale Basis



Wanted: $\begin{pmatrix} 0 \\ -74 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Annahme: $\bigcirc$ ist wie ein Punkt.

Richtung des Arms $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Richtung des Beins $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$c_1 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -74 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{148}{5}$

$c_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -74 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{74}{5}$

$\frac{148}{\sqrt{5}} + \frac{74}{\sqrt{5}} \approx 99,3$

$\left\| c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{148}{5} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|$

$= \frac{148}{\sqrt{5}}$

$\left\| c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{74}{\sqrt{5}}$

A diagram showing a coordinate system with two axes. The first axis is labeled 'Richtung des Arms' with vector $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. The second axis is labeled 'Richtung des Beins' with vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. A vector $\begin{pmatrix} 0 \\ -74 \end{pmatrix}$ is shown pointing downwards. A point on the first axis is circled in red, and a vector from the origin to this point is labeled c_1 . A vector from the tip of c_1 to the tip of the downward vector is labeled c_2 .

Orthonormale Spalten I

Satz 53

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Spalten von A sind orthonormal genau dann wenn $A^T A = I$.

Beweis:

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Spalten von } A \end{array}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & \dots & a_1 \cdot a_n \\ \vdots & & & \\ a_n \cdot a_1 & \dots & \dots & a_n \cdot a_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T \cdot A = I \text{ genau dann wenn } a_i \cdot a_i = 1 = \|a_i\|^2 \\ \text{und } a_i \cdot a_j = 0 \quad (i \neq j)$$



Orthonormal Spalten II

Satz 54

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit orthonormal Spalten und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

- i) $\|Ax\| = \|x\|$, (Invarianz von Normen unter Abb. mit A)
- ii) $(Ax) \cdot (Ay) = x \cdot y$, (Invar. von Skalarprodukten)
- iii) $(Ax) \cdot (Ay) = 0$ genau dann wenn $x \cdot y = 0$.

Beweis: i) $A = [a_1' \dots a_n']$

$$Ax = x_1 \cdot a_1 + \dots + \overset{\in \mathbb{R}}{x_n} a_n \quad \in \mathbb{R}^n$$

$$\|Ax\|^2 = (Ax) \cdot (Ax) = x_1 a_1 \cdot x_1 a_1 + x_1 a_1 \cdot x_2 a_2 + \dots + x_1 a_1 \cdot x_n a_n$$
$$+ x_2 a_2 \cdot x_1 a_1 + x_2 a_2 \cdot x_2 a_2 + \dots$$

ii) Analog

iii) folgt direkt aus ii)

$$+ \dots + x_n a_n \cdot x_n a_n$$
$$= x_1^2 a_1 \cdot a_1 + \dots + x_n^2 \underbrace{a_n \cdot a_n}_{\|a_n\|^2 = 1}$$
$$= x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2$$

