Heute (19.11.2013):

- Textbuch Kapitel 5.4, 5.5
- Wiederholung Diagonalisierbarkeit
- Eigenvektoren und Lineare Transformationen
- Komplexe Eigenwerte

Wiederholung Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *diagonalisierbar*, wenn es eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P gibt mit

$$A = PDP^{-1}.$$

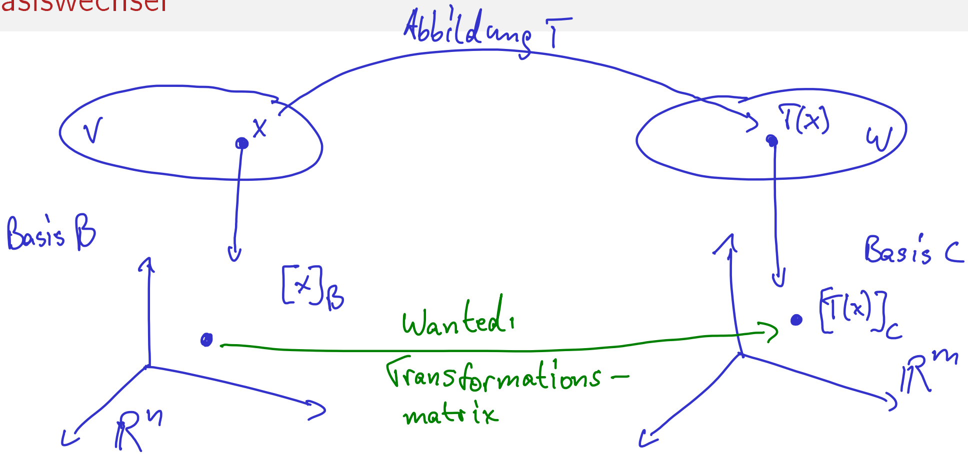
Satz 42

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit

$$A = PDP^{-1}.$$

Dann sind die Spalten von P n linear unabhängige Eigenvektoren von A und die Diagonalelemente von D die dazugehörigen Eigenwerte.

Basiswechsel



Basiswechsel Beispiel

$T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $T(p) = p'$ (Ableitung)
Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1(t) = 1, b_2(t) = t, b_3(t) = t^2$

$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$

$T(p)(t) = a_1 + 2a_2 t$

$$[p]_B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tranformationsmatrix ?}]{} [T(p)]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(b_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$[T(b_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[T(b_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{= \\ X}}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \longmapsto \underset{\substack{\| \\ A \cdot X}}{\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$[b_1]_B \to A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[b_2]_B \to A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[b_3]_B \to A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Was ist A?

Basiswechsel Beispiel

$T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $T(p) = p'$ (Ableitung)
Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1(t) = 1, b_2(t) = t, b_3(t) = t^2$

Probe:

$p(t) = 32 + 18t + 5t^2$

$[p]_B = \begin{pmatrix} 32 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[T(p)]_B = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(p) = 18 + 10t + 0 \cdot t^2$

$= p'$ ✓

Darstellung via Diagonalmatrix

Satz 43
Angenommen A ist diagonalisierbar mit $A = PDP^{-1}$ wobei D eine $n \times n$ Diagonalmatrix ist. Sei $\mathcal{B}$ die basis des $\mathbb{R}^n$ gebildet aus den Spalten von P. Dann ist D die Transformationsmatrix der Abbildung $x \mapsto Ax$ nach Basiswechsel auf B.

$$\underbrace{Ax = \underbrace{P \cdot \underbrace{D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot x}_{[x]_B}}_{\text{Transformation von } [x]_B}}_{[Ax]_B}}_{Ax}$$

$D \cdot P^{-1} \cdot x$

$P \cdot [x]_B = x$

$Ax = P \cdot [Ax]_B$

Was bedeutet das?

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit D (von links)

$\hat{=}$ Skalieren der Komponenten

Ähnlichkeit von Matrix Repräsentationen

$$A = PCP^{-1}$$

A und C ähnlich $\iff$ $\exists P$ invertierbar

$A = P \cdot C \cdot P^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "*A"] \arrow[d, "*P^{-1}"'] & Ax \\
{[x]_B} \arrow[r, "*C"] & {[Ax]_B} \arrow[u, "*P"']
\end{tikzcd}$$

B Basis gebildet durch Spalten von P

Einschub: Komplexe Zahlen

Definition

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge von Zahlen $c = a + ib$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und i die imaginäre Einheit ist ($i^2 = -1$).

Wenn $c = a + ib$, dann nennt man

- $\operatorname{Re} c = a$ den *Realteil* von c,
- $\operatorname{Im} c = b$ den *Imaginärteil* von c,
- $\bar{c} = a - ib$ das *Konjugiert-Komplexe* von c.
- $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der *Betrag* von c.

Definition

Sei $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Die *konjugiert-komplexe* Matrix von B ist die Matrix $\bar{B}$ mit

$$(\overline{B})_{ij} = \overline{B_{ij}},$$

d.h. die Einträge sind die komplex-konjugierten Einträge von B.

Satz 44

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$. Beweis nächste Seite

Insbesondere folgt daraus: Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann

$$\overline{\alpha x} = \bar{\alpha}\bar{x} \qquad \overline{Ax} = \bar{A}\bar{x} \qquad \overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \qquad \overline{\alpha A} = \bar{\alpha}\bar{A}$$

Beweis Komponenten-weise

Beweis durch Linearität der (Matrix) Multiplikation

Beweis für jeden Eintrag

Beweis: $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$

$\alpha = a + i \cdot b$

$\beta = c + i \cdot d$

$\alpha\beta = ac - bd + i(ad + bc)$

$\overline{\alpha\beta} = ac - bd - i(ad + bc)$

$\overline{\alpha} = a - i \cdot b$

$\overline{\beta} = c - i \cdot d$

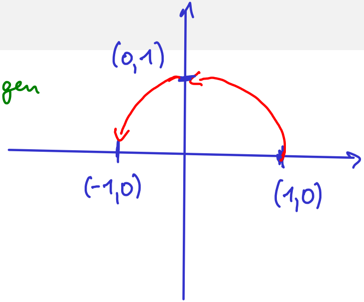
$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = ac + \underbrace{(i^2)}_{(-1)} bd - i(ad + bc)$

$\blacksquare$

Beispiel: Komplexe Eigenwerte

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{=}$$

Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn (um den Ursprung)



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 1 = 0$

Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = \pm i$

Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = (-i)\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Komplexe Eigenwerte 1

Satz 45
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis:

$$A\overline{v} = \overline{A}\,\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$$

λ EW
v EV

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
$A = \overline{A}$

$\overline{v}$ Eigenvektor von A mit
$\overline{\lambda}$ Eigenwert von A

$\square$

Quiz: n ungerade. Gibt es immer einen reellen EW? Ja!

Komplexe Eigenwerte 2

Satz 46

Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit komplexen Eigenwert $\lambda = a - ib$ $(b \neq 0)$ und zugehörigen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$. Dann

$$A = PCP^{-1} \qquad \textit{mit} \qquad P = [\mathit{Re}\, v \;\; \mathit{Im}\, v] \textit{ und } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Beweis:

1. P ist invertierbar $\iff$ $\underbrace{\mathrm{Re}\, v}_{u}$ und $\underbrace{\mathrm{Im}\, v}_{w}$ linear unabhängig

Annahme: $w = \alpha \cdot u$

$A \cdot v = \lambda v$ $\qquad$ $v = u + iw = u(1 + \alpha i)$

echt complex

$A(1+\alpha i)u = \lambda(1+\alpha i) \cdot u \qquad /:(1+\alpha i)$

$Au = \lambda u$

Einträge in A und u sind reel aber $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\lightning$

Komplexe Eigenwerte 2

Satz 46

Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit komplexen Eigenwert $\lambda = a - ib$ ($b \neq 0$) und zugehörigen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$. Dann

$$A = PCP^{-1} \qquad \textit{mit} \qquad P = [\textit{Re}\, v \ \textit{Im}\, v] \textit{ und } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

eben gezeigt: P invertierbar

noch zu zeigen: $A = P \cdot C \cdot P^{-1} \iff A \cdot P = P \cdot C$

$$A \cdot Re(v) = Re(A \cdot v) = Re(\lambda \cdot v) = Re[(a-ib)(Re(v) + i \cdot Im(v))]$$

$$= a \cdot Re(v) + b\, Im(v).$$

Einträge in A sind reell

$$A \cdot Im(v) = Im(Av) = Im(\lambda \cdot v) = Im[(a-ib)(Re(v) + i \cdot Im(v))]$$

$$= -b\, Re(v) + a\, Im(v)$$

Komplexe Eigenwerte 2

Satz 46

Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit komplexen Eigenwert $\lambda = a - ib$ $(b \neq 0)$ und zugehörigen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$. Dann

$$A = PCP^{-1} \qquad \textit{mit} \qquad P = [\mathit{Re}\, v \;\; \mathit{Im}\, v] \textit{ und } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Also $A \cdot P = \left[a\,\mathrm{Re}(v) + b\,\mathrm{Im}(v) \quad -b\,\mathrm{Re}(v) + a\,\mathrm{Im}(v) \right]$

Spalten, d.h. $\in \mathbb{R}^2$

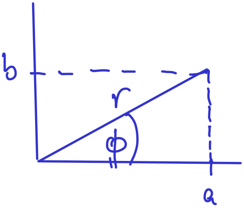
$$P \cdot C = \left[a\,\mathrm{Re}(v) + b\,\mathrm{Im}(v) \quad -b\,\mathrm{Re}(v) + a\,\mathrm{Im}(v) \right]$$

$\Rightarrow \quad A \cdot P = P \cdot C \quad \blacksquare$

Was bedeutet das? Abb. durch A ist gleichbedeutend mit Basiswechsel $(*P^{-1})$, dann Abbilden mit C $(*C)$, und wieder Basiswechsel $(*P)$

Rotationsmatrizen

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ nicht beide gleich } 0.$$



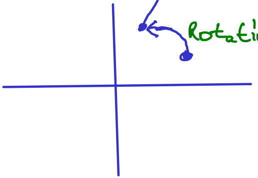
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Streckung um Faktor r

Rotationsmatrix

Rotation um Winkel ϕ

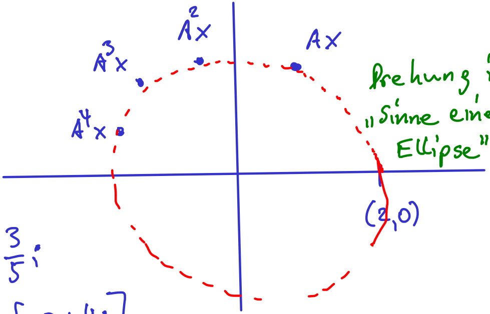


Wenn also $A = P \cdot C \cdot P^{-1}$ bedeutet A also (bis auf Basiswechsel) eine Rotation + Streckung

Beispiel: Komplexe Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/5 \\ 3/4 & 11/10 \end{bmatrix}.$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Drehung im „Sinne einer Ellipse"

Eigenwerte: $\lambda_1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i$, $\lambda_2 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\,i$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{bmatrix} -2-4i \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2+4i \\ 5 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Alternative Darstellung mit $P = [\operatorname{Re} v_1 \ \operatorname{Im} v_1]$

$$A = P \cdot C \cdot P^{-1}$$