Heute (07.11.2013):

- Textbuch Kapitel 4.6, 5.1
- Spaltenraum, Zeilenraum und Rang
- Eigenwerte und Eigenvektoren

Spaltenrang und Zeilenrang

$\mathrm{col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^m$.

$\mathrm{col}(A) = \{ A \cdot x : x \in \mathbb{R}^n \}$

- $A \in \mathbb{R}^{\overset{m\times n}{\cancel{n\times m}}}$ eine beliebige Matrix.
- Wir lernen jetzt:

Maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen

ist gleich

maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten

$\mathrm{Col}(A)$ und $\mathrm{Row}(A)$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Erinnerung: $\mathrm{col}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist das Erzeugnis der Spalten von A.
- Verstehen wir nun die *Zeilen* von A als Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, dann können wir definieren:

$$\mathrm{row}(A) \text{ ist das Erzeugnis der Zeilen von } A.$$ (Zeilenraum)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{row}(A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Col(A) und Row(A)

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ Regel!

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Erinnerung: $\operatorname{col}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist das Erzeugnis der Spalten von A.
- Verstehen wir nun die *Zeilen* von A als Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, dann können wir definieren:

$$\operatorname{row}(A) \text{ ist das Erzeugnis der Zeilen von } A.$$

Erinnerung: $\operatorname{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

Zwei Aussagen sind korrekt. Welche? (Wir verstehen eine $n \times 1$ Matrix auch als Vektor im $\mathbb{R}^n$)

1. $\operatorname{Row}(A) = \operatorname{Col}(A^T)$ ✓
2. $\operatorname{Row}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ f — $\operatorname{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$
3. $\operatorname{Row}(A) = \{x^T \cdot A : x \in \mathbb{R}^m\}$ — strenggenommen nicht richtig, da $x^T \cdot A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$; n, $m\{$ passt nicht A
4. $\operatorname{Row}(A) = \{(x^T A)^T : x \in \mathbb{R}^n\}$
5. $\operatorname{Row}(A) = \{(x^T A)^T : x \in \mathbb{R}^m\}$ ✓

$$(x^T \cdot A)^T = A^T \cdot x$$

Elementare Zeilenoperationen

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sind *Zeilenäquivalent*, wenn die Matrix B durch eine endliche Folge von elementaren Zeilenoperationen

1. Addition eines Vielfachen einer Zeile auf *eine andere* Zeile
2. Vertauschung zweier Zeilen
3. Skalieren einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

hervorgeht.

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = B$$

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} B$$

Elementare Matrizen.

Zeilenraum ist invariant unter elementaren Zeilenop.

Satz 50

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *zeilenäquivalent, dann gilt*

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B).$$

$$A = \underbrace{E_1 \cdots E_k}_{= E \in \mathbb{R}^{m\times m}} B$$

<u>Beweis:</u> „$\subseteq$" ($x \in \mathrm{Row}(A) \Rightarrow x \in \mathrm{Row}\, B$)

$x \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathrm{Row}\, A \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x^T = y^T \cdot A$ $\quad (x = A^T \cdot y)$

Da $A = E \cdot B$ gilt $x^T = \underbrace{y^T \cdot E}_{\in \mathbb{R}^{1\times m}} \cdot B \Rightarrow x \in \mathrm{Row}(B)$

Zeilenraum ist invariant unter elementaren Zeilenop.

Satz 50

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zeilenäquivalent, dann gilt

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B).$$

$(A = E \cdot B)$ — E invertierbar.

„$\supseteq$“ $\left(x \in \mathrm{Row}(B) \Rightarrow x \in \mathrm{Row}(A)\right)$

$x \in \mathrm{Row}(B) \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x = B^T \cdot y$ $\quad (x^T = y^T \cdot B)$

Es gilt $B = E^{-1} \cdot A$ $\Rightarrow$ $x = (E^{-1} \cdot A)^T \cdot y$

$= A^T \cdot \underbrace{(E^{-1})^T \cdot y}_{\in \mathbb{R}^m} \Rightarrow x \in \mathrm{row}(A)$ ∎

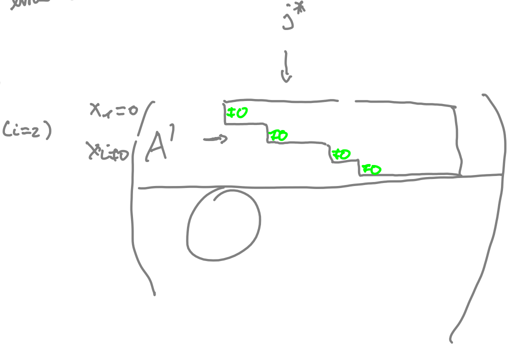
(mit mindestens eine Nichtnullzeile)

Satz 51

Sei A in Zeilenstufenform, dann sind

die Nichtnullzeilen

eine Basis von $\mathrm{Row}(A)$.



Beweis: Sei $x^T \cdot A' = 0^T$, zu zeigen ist $x = 0$

Annahme $x \neq 0$. Sei i der kleinste Index in x mit $x_i \neq 0$

dann gilt mit $j^* = \min\{j : A_{ij} \neq 0\}$: $(x^T \cdot A)_{1,j^*} \neq 0$ ↯

Beispiel

Bestimme eine Basis von $\mathrm{Col}(A)$ und $\mathrm{Row}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Basis von col(A)

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$E \cdot A$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis Row(A)

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}$$

Der Rang einer Matrix

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- *Spaltenrang*: Dimension von $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$
- *Zeilenrang*: Dimension von $\mathrm{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

Satz 52

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Es gilt

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A)).$$

d. h. max Anzahl lin. unabh. Zeilen = max Anzahl lin. unabh. Spalten.

Beweis:

A

$\dim(\mathrm{Row}(A))$ = # Nichtnullzeilen = # Pivotspalten = $\dim(\mathrm{Col}(A))$

Der Rang einer Matrix

$\mathrm{Kern}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

Definition

Der *Rang* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Dimension des Zeilen/Spalten-Raumes.

$\left[A \;\vdots\; \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right]$

Satz 53

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann gilt

$$\mathrm{Rang}(A) + \dim(\ker(A)) = n.$$

Bild:

$A \rightsquigarrow$ 

Rang(A) = # Pivotspalten.

dim(Kern(A)) = # Andere Spalten

Eigenwerte und Eigenvektoren

Lineare Abbildungen

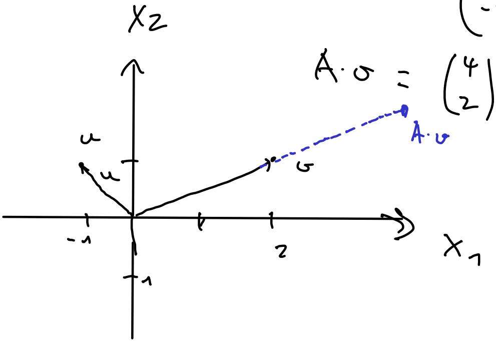
- $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto A \cdot x$

$A \cdot u = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$



Eigenvektor zum Eigenwert 2

$A \cdot v = 2 \cdot v$

Eigenwert

$A \cdot u$

Definition

Ein *Eigenvektor* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Vektor $x \neq 0$ aus $\mathbb{R}^n$ mit

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

auch $\lambda < 0$

λ heisst Eigenwert von A mit Eigenvektor x.

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Sind u und v Eigenvektoren von A?

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 6 - 5 \cdot 6 \\ 5 \cdot 6 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix}$$

u ist Eigenvektor mit Eigenwert -4

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 15 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

v ist kein Eigenvektor.

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- Ist 7 ein Eigenwert der Matrix A?

7 Eigenwert von A

$\iff \exists\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ohne 0

$A \cdot x = 7 \cdot x$

$\iff \quad = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot x$

$\iff \quad Ax - 7 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} x = 0$

$\iff \quad \left[A - \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & \ddots \\ & & & 7 \end{pmatrix} \right] x = 0$

$\iff \operatorname{Kern}\left(A - \begin{pmatrix} 7 & & \\ & \ddots & \\ & & 7 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

Eigenvektor : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenraum

Eigenwert

- $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A
- Menge der Eigenvektoren mit EW λ ist Teilmenge von

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)x = 0\} = \ker \left(A - \lambda \cdot I \right)$$

$\ker(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ = Menge der Eigenvektoren von A bzg λ

Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Der Unterraum von $\mathbb{R}^n$ $\ker(A - \lambda I)$ heißt *Eigenraum* von A bzgl. λ.

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 2$ ist EW
- Bestimme Basis des Eigenraumes bzgl. 2.

Basis des Eigenraums bzgl. 2

Bestimme die Lösungsmenge von $(A - 2 \cdot I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} x = 0$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_2, x_3 frei: $2 \cdot x_1 - x_2 + 6 \cdot x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2 - 3x_3$

Basis Kern$(A-2I)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dreiecksmatrizen

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$\det(B) \neq 0 \iff \operatorname{rang}(B) = n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = A$$

$\det(A) = 2 \cdot 5 \cdot 7$

Eigenwerte: α λ:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 8 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

keinen vollen Rang hat $\}$

$\det(A_\lambda) = (2-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) = 0$

$\iff \lambda \in \{2, 5, 7\}$

Dreiecksmatrizen

Satz 54

Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind die Diagonalemente der Matrix.

Lineare Unabhängigkeit

Satz 55

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Wenn* $v_1, \ldots, v_p$ *Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *sind, dann ist* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *linear unabhängig.*

Lineare Unabhängigkeit

Satz 55

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Wenn* $v_1, \ldots, v_p$ *Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *sind, dann ist* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *linear unabhängig.*