Heute (17.12.2013):

- Textbuch Kapitel 7.4
- Die Singulärwertzerlegung

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symmetrisch
- $A^T \cdot A$ orthogonal diagonalisierbar.
- $A^T \cdot A$ hat nur ≥ 0 EW.!

Beobachtung: EW von $A^T \cdot A$ sind ≥ 0.

Beweis: EW λ mit EV. $v \neq 0$

$\cdot\ v^T | \quad A^T \cdot A \cdot v = \lambda \cdot v \quad , \quad (v^T \cdot A^T) \cdot (A \cdot v) = \| A \cdot v \|^2 \geq 0$

$v^T \cdot A^T \cdot A \cdot v = \overbrace{\lambda \cdot \underbrace{v^T \cdot v}_{>0}}^{\geq 0} \Rightarrow \lambda \geq 0$

Was ist ein Singulärwert?

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $A^T A$ ist symmetrisch und ist somit orthogonal diagonalisierbar.
- Eigenwerte $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ zu orthonormalen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$,

Definition

Die *Singulärwerte* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sind die Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A$:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \geqslant \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

- Singulärwert $\sigma_i = \|A\mathbf{v}_i\|$.

Was ist die Singulärwertzerlegung?

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\qquad m \; \overset{n}{\boxed{\quad A \quad}}$
- r maximaler Index mit $\sigma_r > 0$. Beobachtung: $r = \mathrm{Rang}(A)$
- $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}$
- Fülle mit 0 auf:

$$\Sigma = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} & \overbrace{}^{n-r} \end{array} \\ m-r\,\{ & \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{\underline{m\times n}}$$

Was ist die Singulärwertzerlegung?

Spalten sind orthonormal!

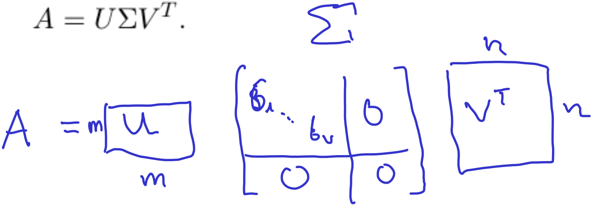
Satz 91

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = r$. Dann gibt es orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$U^T = U^{-1}$

$V^T = V^{-1}$

$$A = U\Sigma V^T.$$



Wozu ist das gut?

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $m \cdot n$ Zahlen in Speicher   Speicherplatz $\approx m\cdot n$
- $\mathrm{Rang}(A) = r$: Σ aus SVD: $\left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ldots \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right]$

$$A = [u_1, \ldots, u_m] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ldots \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} = [u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0] \cdot \Sigma \cdot \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ist durch $\underbrace{u_1, \ldots, u_r}_{r\cdot m}$, $\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{r\cdot n}$, $\underbrace{\sigma_1, \ldots, \sigma_r}_{r}$, $\underbrace{m, n}_{2}$ vollständig beschrieben!

Speicher: $r\cdot m$ $r\cdot n$ r 2 : Insgesamt $r\cdot(m+n+1)+2$

Verlustfreie Kompression falls $r \ll \min\{m,n\}$.

Bsp: $m=n=1000$, $r=2$: 1 Mio $\gg$ 4004

Bildkompression

- Graustufenbild: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}\cancel{m \times n}$ (Speicherplatz: $m \cdot n$
- Berechne Singulärwertzerlegung

$$A = U\Sigma V^T$$

- Setze alle Singulärwerte $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r = 0$

$$A' = U\Sigma' V^T$$

- Neuer Speicherplatz:

viel kleiner

$$k(m+n+1)+2 \ll m \cdot n \text{, falls } k \ll \min\{m,n\}$$

Beweis Satz 91

r letzter Index mit $\lambda_r > 0$!

$\underbrace{A^T \cdot A}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}}$ ist symmetrisch, hat reelle EW ≥ 0. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

Sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ orthonormale Basis der EV zu EW

- $(A \cdot v_i)^T \cdot (A \cdot v_j) = v_i^T \cdot A^T \cdot A \cdot v_j = 0$ falls $i \neq j \Rightarrow A \cdot v_i$ orthogonal

Setze: $u_j := \dfrac{A \cdot v_j}{\underbrace{\|A \cdot v_j\|}_{=\sqrt{\lambda_j}}}$ $j = 1, \dots, r$ und komplettiere zu orthonormaler Basis $u_1, \dots, u_m$.

$$u_j^T \cdot A \cdot v_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \text{ oder } i \geq r+1 \\ \sqrt{\lambda_j} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\blacksquare$