Heute (12.12.2013):

- Textbuch Kapitel 7.3
- Quadratische Formen
- Optimierung unter Nebenbedingungen

- SVD, Image Processing.

- Donnerstag.

QF: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^T \cdot A \cdot x$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ $\quad \cancel{1x_1 + 3x_2 + 4}$

$\max F(x)$

$x \in S_n = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \, , \; x^T \cdot x = 1 \}$

Maximierung und Minimierung von quadratischen Formen

Satz 91

Sei A eine symmetrische Matrix. Sei weiter

$$M = \max\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \ : \ \|\mathbf{x}\| = 1\} \qquad \textit{und} \qquad m = \min\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \ : \ \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Dann ist

- *M gleich dem größten Eigenwert von A und*
- *m gleich dem kleinsten Eigenwert von A.*

Für einen Einheitsvektor $\mathbf{x}$ gilt

- *$M = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert M ist und*
- *$m = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert m ist.*

Beweis

max $x^T \cdot A \cdot x$, u. d. N. $\|x\|=1$. , A ist symmetrisch.

unter der Nebenbedingung $\qquad (A^T = A)$

A ist orthogonal diagonalisierbar. d.h. $\exists\, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

mit:
- $P^T = P^{-1}$
- $A = P \cdot D \cdot P^T$

Sei nun $(p_1, \dots, p_n) = P$.

$p_1, \dots, p_n$ ist orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Schreibe $x = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n \cdot p_n$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Inspiziere:

$$x^T \cdot A \cdot x = x^T P \cdot D \cdot P^T \cdot x = \underbrace{x^T P}_{= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \cdot D \cdot \underbrace{P^T \cdot (\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n \cdot p_n)}_{= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}$$

$$D \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) \geq \lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_n \cdot \alpha_n^2 = x^T \cdot A \cdot x$$

Da $\|x\| = 1$ $\left(\Leftrightarrow x^T \cdot x = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1 \right)$

Beweis

Also haben wir gezeigt: $\|x\|=1. \Rightarrow x^T \cdot A \cdot x \leq \lambda_1.$

Welches x erfüllt $x^T \cdot A \cdot x = \lambda_1$?

p_1 ; $\quad p_1^T \cdot A \cdot p_1 = p_1^T \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot P^T \cdot p_1$

$$= \underbrace{p_1^T \cdot (p_1, p_2 \cdots p_n)}_{e_1^T} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix} \cdot p_1}_{e_1}$$

$$= \lambda_1 \qquad \blacksquare$$

Beweis für λ_n ähnlich!

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Bestimme eine Lösung von $\max\{x^T Ax : x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$. $= 6$
- Char. Poly. $-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18 = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$

1.) Größter EW: $\lambda = 6$.

2.) Suche EV u zu EW $\lambda=6$ mit $\|u\|=1$.

Kern $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & \cancel{5} & \cancel{-5} \end{pmatrix}$

freie Var: x_3 $\quad x_2 = x_3$, $\quad x_1 + x_3 - 2x_3 = 0$ $\quad$ EV: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = x_3$, $\quad u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zweitgrößter Eigenwert

Satz 92

Sei A eine symmetrische Matrix, λ_1 der größte Eigenwert von A und $\mathbf{u}_1$ der dazugehörige Eigenvektor. Dann ist das

$$\max \quad \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$
$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \qquad \mathbf{x}^T\mathbf{u}_1 = 0$$

der zweitgrößte Eigenwert λ_2 von A. Das Maximum wird angenommen wenn $\mathbf{x}$ der normierte Eigenvektor zu λ_2 ist.

Zur Präzisierung: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ Die Eigenwerte von A (gegebenfalls mit Wiederholungen) sind, dann ist λ_2 der zweitgrößte EW.

Beweis

Beispiel

- Bestimme $\max\{9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \colon x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1, x_1 = 0\}$

4. $\|x\| = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$\|x\| = 1$ und $x_1 = 0 \iff x_2^2 + x_3^2 = 1.$

Dann gilt:

$$\underbrace{9x_1^2}_{=0} + 4x_2^2 + 3x_3^2 = 4x_2^2 + 3\overbrace{x_3^2}^{\geq 0}$$

$$\leq 4x_2^2 + 4x_3^2$$

$$= 4$$

4 wird auch angenommen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ OPT. WERT $= 4.$

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Bestimme den maximalen Wert der quadratischen Form $x^T A x = 0$ unter den Nebenbedingungen $x^T x = 1$ und $\underline{u_1^T x = 0}$, wobei u_1 Eigenvektor zum grössten Eigenwert von A ist. EWte: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Wir wissen mit Satz 92. $\max = \lambda_2 = 3$.

Berechne Vorm:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & \cancel{2} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

x_3 : frei.

$2x_2 = -x_3$

$x_2 = -\frac{1}{2} x_3$

$x_1 - \frac{1}{2} x_3 + x_3 = 0$

$x_1 = -\frac{1}{2} x_3$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungswert: 3. Lösung: $u_2 = \sqrt{2/3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung

Satz 93

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.

Verallgemeinerung

Satz 93

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.

Verallgemeinerung

Satz 93
Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.

Verallgemeinerung

Satz 93

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.