Heute (5.12.2013):

- Textbuch Kapitel 7.1, 7.2
- Diagonalisierung symmetrischer Matrizen
- Quadratische Formen

Symmetrische Matrizen

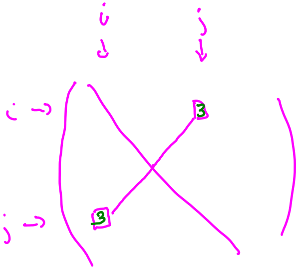
Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *symmetrisch*, wenn

$$A^T = A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$ symmetrisch.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$ symmetrisch.



Diagonalisierung

$A = A^T$

v

$A \frac{\overbrace{A \cdot v}^{v^1}}{\|A \cdot v\|}$ $\frac{A v_1}{\|A \cdot v_1\|}$

Power Method.

Potenzmethode.

Falls möglich, diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Char. Poly.: $-\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = -(\lambda - 8)(\lambda - 6)(\lambda - 3)$

3 verschiedene reelle Nullstellen $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

$\underline{\lambda = 8:}$ Kern : $\begin{pmatrix} 6-8 & -2 & -1 \\ -2 & 6-8 & -1 \\ -1 & -1 & 5-8 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$ $x_1 = -x_2$

$x_3 = 0$

Kern wird von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt.

Diagonalisierung

$P^T \; A \cdot P$

Falls möglich, diagonalisiere die Matrix

$$= \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix} \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix} \left[A \cdot p_1 , A p_2 \, A p_3 \right] = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix} \left[8 \cdot p_1 , 6 p_2 , 3 p_3 \right] = \begin{pmatrix} 16 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{36} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Char. Poly.: $-\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = -(\lambda - 8)(\lambda - 6)(\lambda - 3)$

$$\lambda = 8 \quad \overset{p_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} , \quad \lambda = 6 \quad \overset{p_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} , \quad \lambda = 3 \quad \overset{p_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\cdot = 0$ $\quad \cdot = 0$ $\quad \cdot = 0$

p_1, p_2, p_3 sind orthogonal.

$$P^T \cdot P = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}$$

Wiederholen:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$p_i \perp p_j$ wenn $i \neq j$

$$P^{-1} = \,?$$

$$\boxed{\begin{matrix} \|p_i\|^2 \\ p_i^T \end{matrix}}$$

insbesondere: P orthonormal (Spalten), dann gilt $P^{-1} = P^T$

$$P^{-1} = P^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\|p_1\|^2} & & \\ & \frac{1}{\|p_2\|^2} & \\ & & \frac{1}{\|p_3\|^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_1^T}{p_1^T \cdot p_1} \\ \frac{p_2^T}{p_2^T \cdot p_2} \\ \frac{p_3^T}{p_3^T \cdot p_3} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 8 \quad \overset{p_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \lambda = 6 \quad \overset{p_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad \lambda = 3 \quad \overset{p_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\cdot = 0$ $\qquad$ $\cdot = 0$ $\qquad$ $\cdot = 0$

p_1, p_2, p_3 sind orthogonal.

$$P^T \cdot P = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_1' = p_1 / \|p_1\| = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2' = \frac{p_2}{\|p_2\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} / \sqrt{6}$$

$$p_3' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$P' = \left[p_1' \; p_2' \; p_3' \right]$$

mit $\boxed{\overset{= P'^{-1}}{P'^T}} \, A \cdot P'$

$$= P'^T \left[A \cdot p_1' \;\; A p_2' \;\; A p_3' \right]$$

$$= P'^T \left[8 \cdot p_1' \;\; 6 \cdot p_2' \;\; 3 \cdot p_3' \right] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Satz 83

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, dann sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}$ orthogonal.

Beweis:

$$\boxed{A \cdot u = \alpha \cdot u}$$

$$\boxed{A \cdot v = \beta \cdot v}$$

mit $\boxed{\alpha \neq \beta}$

z.z.: $u^T \cdot v = 0$

Daraus schliessen wir.

$\alpha \cdot v^T \cdot u = \beta \cdot v^T \cdot u \Rightarrow v^T \cdot u = 0$

$A^T = A$

$$v^T \cdot A \cdot u = v^T \cdot \alpha \cdot u$$

$$v^T \cdot A \cdot u = v^T \cdot A^T \cdot u = (A \cdot v)^T \cdot u = \beta \cdot v^T \cdot u$$

Konsequenz: $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden Eigenwerte von A. Dann ist A diagonalisierbar.

Beweis: Sei v_i Eigenvektor zum EW λ_i mit $\|v_i\| = 1$.

Es gilt $\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot A \cdot \left(v_1, \dots, v_n \right)$

$v_i \perp v_j$ wenn $i \neq j$

$v_i^T \cdot v_i = 1$

$$= \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \left(A \cdot v_1, \dots A \cdot v_n \right) = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \left(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

Orthogonal diagonalisierbare Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *orthogonal diagonalisierbar*, wenn es eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt gibt mit $A = PDP^T$.

$P = [p_1, \dots, p_n]$

orthogonal diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ orthonormal diagonalisierbar.

$P \begin{bmatrix} \frac{1}{\|p_1\|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\|p_n\|} \end{bmatrix} = Q$ orthonormal.

$A = P \cdot D \cdot P^T = Q \cdot \begin{pmatrix} \|p_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|p_n\| \end{pmatrix} \cdot D \cdot \left[Q \cdot \begin{pmatrix} \|p_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|p_n\| \end{pmatrix} \right]^T$

$= Q \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \|p_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|p_n\| \end{pmatrix} \cdot D \begin{pmatrix} \|p_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|p_n\| \end{pmatrix}} \cdot Q^T$

Diagonalmatrix

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar

Satz 84

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch ist.

$\Leftarrow$

„$\Rightarrow$" Trivial, denn $A = P^T D \cdot P$ und somit

$$A^T = [P^T \cdot D P]^T = P^T D^T \cdot P^{T^T}$$
$$= P^T \cdot D P = A$$

„$\Leftarrow$" <u>Lemma:</u> A symmetrisch, dann hat A <u>nur reelle Eigenwerte.</u>

<u>Quasibeweis:</u> i kann kein Eigenwert sein.

Denn nehmen wir an, i ist ein Eigenwert.

Sei $\boxed{\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Uparrow}{u}} + i\cdot \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Uparrow}{v}}}$ der Eigenvektor von A mit zum $\boxed{\text{Eigenwert } i}$

$$A(u + i\cdot v) = i\,(u + i\cdot v)$$

$$A\cdot u + i\cdot A\cdot v = i\cdot u + i^2\cdot v$$

$$= i\cdot u - v$$

$\not\exists$ Eigenvektor $\Rightarrow$ $(\neq 0)$ zum Eigenwert i.

Daraus können wir schließen:

$$A\cdot u = -v$$

$$u^T A\cdot v = \underbrace{u^T u}_{\geq 0}$$

$$\|$$

$$(A^T\cdot u)^T\cdot v$$

$$\|$$

$$(A\cdot u)^T\cdot v = \overbrace{-\underbrace{v^T\cdot v}_{\geq 0}}^{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \quad u^T\cdot u = 0, \quad v^T v = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = 0, \quad v = 0$$

Ähnlich zeigt man dass keine nichtreelle Zahl EW von A.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Es gibt mindestens einen reellen Eigenwert λ

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnlich.

Sei v der Eigenvektor zu diesem Eigenwert λ,

$\|v\|=1$

$v \neq 0$, und sei $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Vektor, der

$\|u\|=1$

senkrecht auf v steht.

$$\begin{pmatrix} v^T \\ u^T \end{pmatrix} A \cdot (v, u) = \begin{pmatrix} v^T \\ u^T \end{pmatrix} [A \cdot v, A \cdot u]$$

$$= \begin{pmatrix} v^T \\ u^T \end{pmatrix} [\lambda \cdot v, A \cdot u]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & \cancel{v^T A \cdot u} \; 0 \\ 0 & u^T \cdot A \cdot u \end{bmatrix}$$

$v^T \cdot A \cdot u$

$= v^T \cdot A^T \cdot u$

$= (A \cdot v)^T \cdot u = \lambda \cdot \underline{v^T \cdot u} = 0$

Beispiel

$-(\lambda-7)^2(\lambda+2)$

Finde eine orthogonale Diagonalisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Spektralsatz

Satz 85

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die folgenden Eigenschaften:

a) *A hat n reelle Eigenwerte (Vielfachheit mitgezählt!).*

b) *Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ ist die algebraische Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.*

c) *Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal zueinander.*

d) *A ist orthogonal diagonalisierbar.*

Die Spektralzerlegung

- Sei $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, wobei $P = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ orthonormal und $\lambda_1, \ldots, \lambda n$ die dazugehörigen Eigenwerte.
- $$A = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}$$

Beispiel

Konstruiere eine spektrale Dekomposition von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Quadratische Form

Definition

Eine *quadratische Form* ist eine Funktion $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die als

$$Q(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

geschrieben werden kann.

O.B.d.A ist A symmetrisch

Substitution

- Betrachte $Q(x) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ mit symmetrischer Matrix A
- $A = PDP^T$ orthogonale Diagonalisierung
- Substituiere $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ oder $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$.

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

Hauptachsentransformation

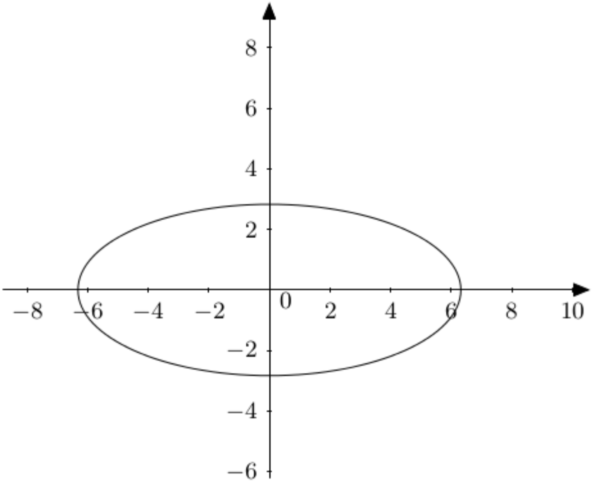
Satz 86

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Es existiert eine orthogonale Matrix P so dass die Substitution $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ in eine quadratische Form $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ überführt, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

- Die Spalten von P heißen *Hauptachsen*.

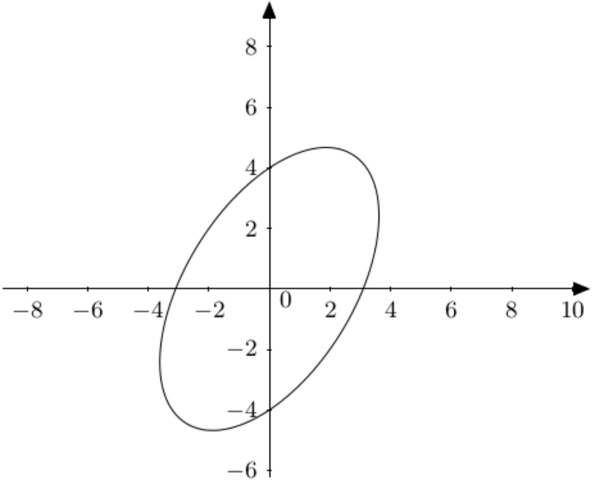
Beispiel

- $x_1^2 + 5x_2^2 = 40$



Beispiel

- $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 48$



Klassifikation quadratischer Formen

Definition

Eine quadratische Form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ist

a) *positiv definit*, wenn $Q(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$

b) *negativ definit*, wenn $Q(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$

c) *indefinit*, wenn $Q(\mathbf{x})$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann

d) *positiv semidefinit*, wenn $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ für alle $\mathbf{x}$

e) *negativ semidefinit*, wenn $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ für alle $\mathbf{x}$

Satz 87

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ *ist*

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* A *echt positiv sind.*

b) *negativ definit*

c) *indefinit*

Satz 87

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *ist*

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* A *echt positiv sind.*

b) *negativ definit*

c) *indefinit*

Satz 87

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *ist*

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* A *echt positiv sind.*

b) *negativ definit*

c) *indefinit*

Satz 87

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *ist*

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* A *echt positiv sind.*

b) *negativ definit*

c) *indefinit*

Quadratische Formen und Eigenwerte

Satz 87

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *ist*

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von* A *echt positiv sind.*

b) *negativ definit*

c) *indefinit*