Heute (28.11.2013):

18 dez. Caffeteria

$18^{\underline{00}}$ Gripes MA

Gebäude.

- Textbuch Kapitel 6.5, 7.1
- Problem der kleinsten Quadrate und die QR Zerlegung
- Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad$ $Ax = b$ ist nicht lösbar. $\quad$ $\|A\hat{x} - b\|$

Satz 80

Die Menge der Lösungen des Problems der kleinsten Quadrate ist die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

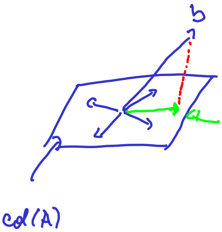
$$A^T A x = A^T b$$

$\hat{x}$ eine Lösung.

A

$\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A \cdot \hat{x} = \mathrm{Proj}_{Col(A)}(b)$



$\mathrm{proj}_{Col(A)}(b) = A \cdot \hat{x}$

Punkt in Col(A), der am nächsten zu b liegt.

Beispiel

$Ax=b$

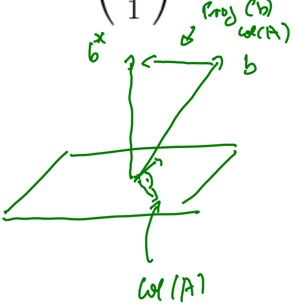
$\|A\hat{x}-b\|$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weniger stupide Art und Weise:

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{col}(A)}(b) = \overset{-2}{\overset{\shortparallel}{\frac{\langle b, s_1\rangle}{\langle s_1, s_1\rangle}}} \cdot s_1 + \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\frac{\langle b, s_2\rangle}{\langle s_2, s_2\rangle}}} s_2 + \overset{3}{\overset{\shortparallel}{\frac{\langle b, s_3\rangle}{\langle s_3, s_3\rangle}}} s_3$$



Beispiel

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weniger elegante Methode:

Löse $A^T \cdot A \cdot x = A^T b$

Erweiterte Koeff. Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \div 2 \\ \div 2 \\ \div 2 \\ \div 2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Beispiel

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \div 2 \\ \div 2 \\ \div 2 \\ \div 2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\underline{x_4 : \text{frei}}$

$$x_3 - x_4 = -2$$
$$\Leftrightarrow x_3 = -2 + x_4$$

$$x_2 - x_4 = -5$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -5 + x_4$$

$$x_1 + x_4 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3 - x_4$$

<u>Die Lösungsmenge:</u>

$$\boxed{L = \left\{ x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Übung: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nicht vollen Spaltenrang (Spalten sind nicht lin. unabh.)

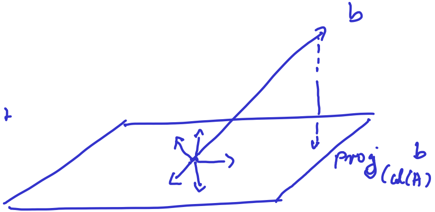
$\Rightarrow \quad \ker(A^T \cdot A) \supsetneq \{0\}$

Lemma:

Sind die Spalten von A linear abhängig, dann gibt es ∞-viele $\hat{x}$ mit

$$A\cdot\hat{x} = \text{proj}_{\text{col}(A)} b$$

Beweis: Es gibt ein $\hat{x}$ (schon gesehen)



Ausserdem gibt es ein $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht alle gleich Null mit

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \qquad \Big(\lambda \in \text{Ker}(A) \Big)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Mit $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$A(\hat{x} + \beta\cdot\lambda) = A\hat{x} + \beta\cdot \overbrace{A\cdot\lambda}^{=0} = A\cdot\hat{x} = \text{Proj}_{\text{col}(A)} b$$

$Ax = b$

Satz 81

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) *Das Problem der kleinsten Quadrate hat für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung.* $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$

$A(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) = 0 \Downarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

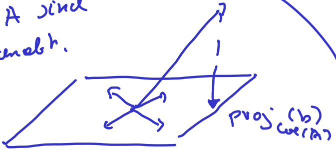
b) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

c) *Die Matrix $A^T A$ ist invertierbar.* $\Updownarrow$

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) Das GLS $A\cdot x = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)} b$ $(*)$

ist eindeutig lsb. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. $\Leftrightarrow$ Spalten von A sind linear unabh.



denn die Menge der Lsg von $(*)$ ist mit einer gegebenen

Lsg $\hat{x}$: $\{\hat{x} + v : v \in \mathrm{Ker}(A)\}$.

b) $\Rightarrow$ a) Gäbe es zwei Lsg. $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$ von $A\cdot x = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}(b)$, dann ist

Der Fehler

$$\left\langle b - A\cdot\hat{x}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\-4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle b - A\cdot\hat{x}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\-4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

Definition

Der *Fehler des kleinste Quadrate Problems* für $Ax = b$ ist

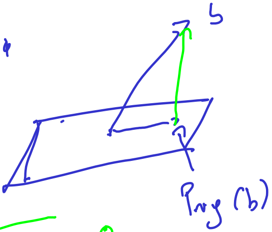
$$\|b - \mathbf{proj}_{\mathrm{Col}(A)} b\|$$

Lsg: $\hat{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\mathrm{Proj}_{Col(A)}(b) = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$

Beispiel:
Betrachte das Beispiel von vorher:

$$A = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}2\\0\\11\end{pmatrix}$$



Der Fehler des k.Q.P. ist:

Fehler: $\left\|\begin{pmatrix}-2\\-4\\8\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{20+64} = \sqrt{84} = 9{,}\ldots$

Das k.Q.P. und die QR-Zerlegung

Erinnerung: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, Spalten sind linear unabhängig.

Schreiben $\Longrightarrow$ $A = Q \cdot R$ mit $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\measuredangle$ R ist obere Dreiecksmatrix mit echt pos. Diagon.

Q: Orthonormale Matrix
(1. Spalten sind ortogonal
2. ~~Längen~~ Längen der Spalten $=1$)

$A^T = R^T \cdot Q^T$

$$\boxed{R^T = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ * & \ddots \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar}}$$

P.d.k.Q.: Statt $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b \iff \cancel{R^T} \cdot \underbrace{Q^T \cdot Q}_{\in \mathbb{R}^{n\times n} = I_n} \cdot R \cdot x = \cancel{R^T} \cdot Q^T \cdot b \quad | \cdot (R^T)^{-1}$

Löse $\iff R \cdot x = Q^T \cdot b$

Das k.Q.P. und die QR-Zerlegung

Q ist orthonormal!

Satz 82

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit linear unabhängigen Spalten und sei $A = QR$ eine QR-Faktorisierung von A, wie in Satz 78. Dann ist die eindeutige Lösung des k.Q.P. für $Ax = b$

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^T b.$$

Beispiel

$$\hat{x} = R^{-1} \cdot Q^T \cdot b$$

Finde die Lösung des k.Q.P. für $Ax = b$ mit

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \lambda \cdot v_1$$

$$= x_2 - \frac{x_2^T v_1}{v_1^T v_1} \cdot v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{8}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3^T \cdot v_1}{v_1^T v_1} v_1 - \frac{x_3^T \cdot v_2}{v_2^T \cdot v_2} v_2$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-4 \\ -1 \\ 2-1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d.h. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finde die Lösung des k.Q.P. für $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = R^{-1} \cdot Q^T \cdot b$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

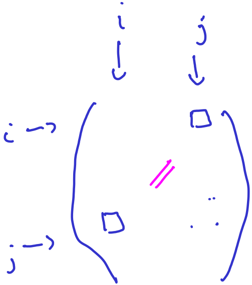
Symmetrische Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *symmetrisch*, wenn

$$A^T = A.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



Diagonalisierung

Falls möglich, diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$*-1$

$+$

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Satz 83

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine symmetrische Matrix. Sind* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{u}$ *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, dann sind* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{u}$ *orthogonal.*

Orthogonal diagonalisierbare Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *orthogonal diagonalisierbar*, wenn es eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt gibt mit $A = PDP^T$.

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar

Satz 84
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch ist.

Beispiel

Finde eine orthogonale Diagonalisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Spektralsatz

Satz 85

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die folgenden Eigenschaften:

a) *A hat n reelle Eigenwerte (Vielfachheit mitgezählt!).*
b) *Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ ist die algebraische Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.*
c) *Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal zueinander.*
d) *A ist orthogonal diagonalisierbar.*

Die Spektralzerlegung

- Sei $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, wobei $P = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ orthonormal und $\lambda_1, \ldots, \lambda n$ die dazugehörigen Eigenwerte.
- $$A = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}$$

Beispiel

Konstruiere eine spektrale Dekomposition von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Konstruiere eine spektrale Dekomposition von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$