Heute (10.12.2013):

- Textbuch Kapitel 7.1, 7.2, 7.3
- Diagonalisierung symmetrischer Matrizen
- Quadratische Formen

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar

Erinnerung: Satz 84

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch ist.

diagonalisierbar: $\exists P, D: \quad A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

orthogonal — " — : P orthogonale Matrix $(P^T = P^{-1})$

Beispiel

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Finde eine orthogonale Diagonalisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$(3-\lambda)(6-\lambda)(3-\lambda) + (-2)2\,4$
$+ 4\,(-2)\,2 - 4\,(6-\lambda)\,4$
$- 2\cdot 2\cdot(3-\lambda) - (3-\lambda)\,(-2)(-2)$ //

char. poly. A: $0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1 = 7 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -2 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Orthogonalisieren: $v_2 - \dfrac{v_2^T v_1}{v_1^T v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} = v_2'$

$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$

Normieren: $u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$

Der Spektralsatz

Satz 85

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die folgenden Eigenschaften:

a) *A hat n reelle Eigenwerte (Vielfachheit mitgezählt!).*

b) *Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ ist die algebraische Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.*

c) *Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal zueinander.*

d) *A ist orthogonal diagonalisierbar.*

Die Spektralzerlegung

- Sei $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, wobei $P = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ orthonormal und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\cancel{n}} n$ die dazugehörigen Eigenwerte.
-

$$A = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 u_1 \;\cdots\; \lambda_n u_n) \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \underbrace{u_1 u_1^T} + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T$$

Matrizen (Projektionsmatrizen)

rang 1

Beispiel

Konstruiere eine spektrale Dekomposition von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 \end{array}$$

$$A = 8 \cdot u_1 u_1^T + 3\, u_2 u_2^T$$

$$= 8 \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Quadratische Form

Definition

Eine *quadratische Form* ist eine Funktion $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die als

$$Q(x) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

geschrieben werden kann.

Bsp:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q(x) = x^T A x = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

O.B.d.A ist A symmetrisch

ohne Beschränkung
der Allgemeinheit

Bsp:
$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_1x_3 - 2x_2^2$$

$$x^T A x = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} \boxed{9} & 2 & 7/2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 7/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 9x_1 + 2x_2 + 7/2\, x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ 7/2\, x_1 \end{bmatrix} = 9x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{7}{2}x_1x_3 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 7/2\, x_1x_3$$

Substitution

- Betrachte $Q(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ mit symmetrischer Matrix A
- $A = PDP^T$ orthogonale Diagonalisierung
- Substituiere $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ oder $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$.

$$x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = y^T \underbrace{P^T P}_{= I} D \underbrace{P^T P}_{= I} y$$

$$= \underline{y^T D y}$$

gibt es keine gemischten Terme mehr.

Beispiel

$Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 = x^T A x$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 3$

$v_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -7$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad x = Py$

$x^T A x = y^T D y = \underline{3y_1^2 - 7y_2^2}$

↳ nur noch Quadrate

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Hauptachsentransformation

Satz 86

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Es existiert eine orthogonale Matrix P so dass die Substitution $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ in eine quadratische Form $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ überführt, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

- Die Spalten von P heißen *Hauptachsen*.

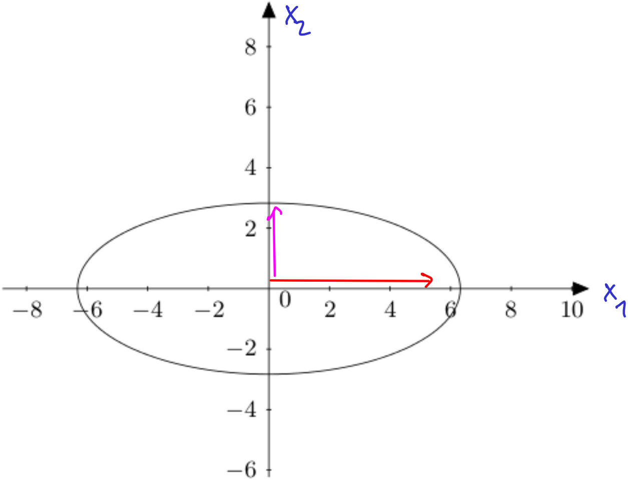
Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 5$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Spalten von P

$\Rightarrow$ Hauptachsen

- $x_1^2 + 5x_2^2 = 40$



Beispiel

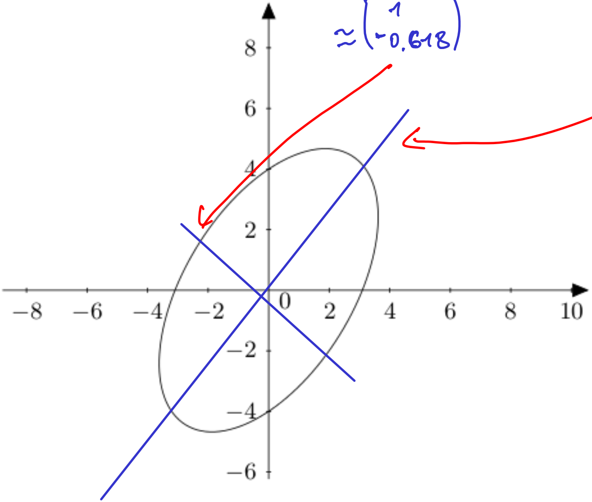
$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 4 + \sqrt{5}$ $\lambda_2 = 4 - \sqrt{5}$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2\,(1-\sqrt{5}) \end{bmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}618 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2\,(1+\sqrt{5}) \end{bmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}618 \end{pmatrix}$

- $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 48$

$\quad \parallel$

$\quad x^T A x$



Klassifikation quadratischer Formen

Definition

Eine quadratische Form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ist

a) *positiv definit*, wenn $Q(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$

b) *negativ definit*, wenn $Q(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$

c) *indefinit*, wenn $Q(\mathbf{x})$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann

d) *positiv semidefinit*, wenn $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ für alle $\mathbf{x}$

e) *negativ semidefinit*, wenn $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ für alle $\mathbf{x}$

Satz 87

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ist

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A echt positiv sind.*

b) *negativ definit*, wenn alle Eigenwerte von A echt negativ sind.

c) *indefinit*, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

<u>Beweis:</u> $A = P \cdot D \cdot P^T$ mit $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $x = Py$

$x^T A x = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

Wenn $\lambda_i > 0 \Rightarrow x^T A x > 0$ für alle $x \neq 0$

wenn $\lambda_i < 0 \Rightarrow x^T A x < 0$ — " — $x \neq 0$

$\exists \lambda_i \geq 0, \lambda_j \leq 0$

$\Rightarrow x^T A x \geq 0$ für $x = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$x^T A x \leq 0$ für $x = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

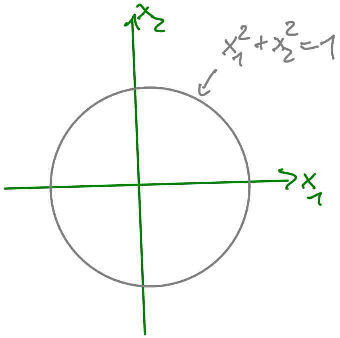
Optimierung von Quadratischen Formen mit Nebenbedingung

Problem: maximieren/minimieren von $x^T A x$

mit Nebenbedingung $\|x\| = 1$

$\|x\|^2 = 1$

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$



Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } 9, 4, 3$$

- maximiere $9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ mit Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

$$9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \leq 9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 9$$

$\Rightarrow$ 9 obere Schranke

wird angenommen @ $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

Maximierung und Minimierung von quadratischen Formen

Satz 88

Sei A eine symmetrische Matrix. Sei weiter

$$M = \max\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \ : \ \|\mathbf{x}\| = 1\} \qquad \text{und} \qquad m = \min\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \ : \ \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Dann ist

- *M gleich dem größten Eigenwert von A und*
- *m gleich dem kleinsten Eigenwert von A.*

Für einen Einheitsvektor $\mathbf{x}$ gilt

- *$M = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert M ist und*
- *$m = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert m ist.*

Beweis

Zweitgrößter Eigenwert

Satz 89

Sei A eine symmetrische Matrix, λ_1 der größte Eigenwert von A und $\mathbf{u}_1$ der dazugehörige Eigenvektor. Dann ist das

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \qquad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0$$

der zweitgrößte Eigenwert λ_2 von A. Das Maximum wird angenommen wenn $\mathbf{x}$ der normierte Eigenvektor zu λ_2 ist.

Beweis

Verallgemeinerung

Satz 90

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.