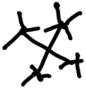
Lineare Algebra

Heute (26.11.2013):

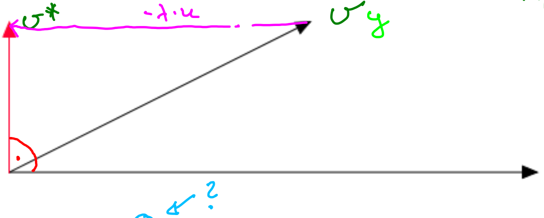
SNF

- Textbuch Kapitel 6.3, 6.4
- Orthogonale Projektion
- Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren



Orthogonale Projektion

v^* : Projektion von v in das orthogonale Komplement von u.



$u \neq 0$

zu Skizze:

$W = \{\alpha \cdot u : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$y = \lambda \cdot u$

$z = v^*$

Berechnen von v^*: $\quad v^* = v - \lambda \cdot u$

$v^{*T} \cdot u = 0 \qquad (v - \lambda \cdot u)^T \cdot u = 0 \iff v^T \cdot u - \lambda \cdot \underbrace{u^T \cdot u}_{\neq 0} = 0$

$v^* \circ u \qquad \iff \lambda = \frac{v^T \cdot u}{u^T \cdot u}$

Algo: $\boxed{v^* = v - \frac{v^T \cdot u}{u^T \cdot u} \cdot u}$

Beispiel

- $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5 \in \mathbb{R}^5$ orthogonale Basis des $\mathbb{R}^5$
- $\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_5\mathbf{u}_5$
- $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ $= \{\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- Aufgabe: Schreibe y als $y = y_1 + y_2$ mit $\underline{y_1 \in W}$ und $\underline{y_2 \in W^\perp}$

$$y_1 = c_1 u_1 + c_2 \cdot u_2 \in W$$

$$y_2 = c_3 u_3 + c_4 \cdot u_4 + c_5 \cdot u_5 \in W^\perp$$

$y_2 \in W^\perp$ da: Sei $\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \in W$, z.z. $\underbrace{(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2)^T \cdot y_2} = 0$

$$= (\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2)^T (c_3 u_3 + c_4 u_4 + c_5 u_5) = \alpha \cdot \underbrace{u_1^T \cdot c_3 \cdot u_3}_{=0} + \alpha \cdot \underbrace{u_1^T \cdot c_4 \cdot u_4}_{=0} \cdots$$

Seien $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$, $u_1, \dots, u_k \neq 0$ und $\forall i \neq j \; (u_i)^T \cdot u_j = 0$

? Sind $u_1, \dots, u_k$ linear unabh.?

Ja: Denn nehmen wir an $u_1, \dots, u_k$ sind lin. abh.

Dann ist ein u_i im Span der anderen Vektoren.

O.B.d.A. $u_k \in \operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$. $\angle$

$$u_k = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1}$$

nicht alle $\alpha_i = 0$ da $u_k \neq 0$

Sei OBdA. $\alpha_1 \neq 0$

$$u_k^T \cdot u_1 = (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot u_{k-1})^T \cdot u_1$$

$$= \alpha_1 \cdot \underbrace{u_1^T \cdot u_1}_{\neq 0} + \alpha_2 \cdot \underbrace{u_2^T \cdot u_1}_{=0} \dots + \alpha_{k-1} \cdot \underbrace{u_{k-1}^T \cdot u_1}_{=0} \neq 0 \quad ⚡.$$

$$\frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1}$$

Satz 74

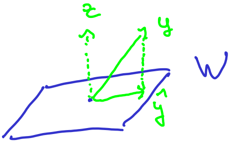
Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Jeder Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ kann eindeutig in der Form

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \quad \textit{mit} \quad \hat{\mathbf{y}} \in W, \mathbf{z} \in W^\perp$$

geschrieben werden.

Ist zumal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ eine orthogonale Basis von W, dann ist

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p$$



und $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

Man schreibt $\hat{y} = \mathrm{proj}_W(y)$

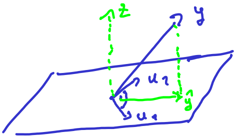
Beispiel

- $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\Rightarrow \boxed{z = y - \frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1} \cdot u_1 - \frac{u_2^T \cdot y}{u_2^T \cdot u_2} \cdot u_2}$$

$$\hat{y} = \frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1} \cdot u_1 + \frac{u_2^T \cdot y}{u_2^T \cdot u_2} \cdot u_2$$

$$\underline{u_1^T \cdot u_2} = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 - 1$$
$$= 0$$



$$z = y - \lambda_1 \cdot u_1 - \lambda_2 \cdot u_2$$

$y - \frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1} \cdot u_1$ ist ort. zu u_1

<u>2 Bedingungen an z:</u>

i) $z \perp u_1 \Leftrightarrow u_1^T \cdot z = 0 \Leftrightarrow u_1^T (y - \lambda_1 \cdot u_1 - \lambda_2 \cdot u_2) = 0$

$$\Leftrightarrow u_1^T \cdot y - \lambda_1 \cdot u_1^T \cdot u_1 - \cancel{\lambda_2 \cdot u_1^T \cdot u_2} = 0$$

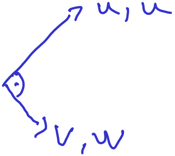
$$\lambda_1 = \frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1}$$

ii) $z \perp u_2$

mit ähnlichem Arg: $\lambda_2 = \frac{u_2^T \cdot y}{u_2^T \cdot u_2}$

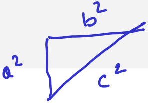
$(u \cdot v) \cdot (w \cdot x)$ $\quad u, v, w, x \in \mathbb{R}^2$

$\neq u \cdot (v \cdot w) \cdot x$?



$u^T \cdot v \cdot w^T \cdot x$

$= u^T \underbrace{(v \cdot w^T)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} \cdot x$



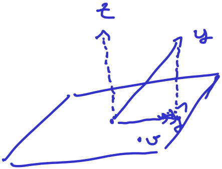
Pythagoras.

Satz 75

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Die orthogonale Projektion $\hat{\mathbf{y}}$ von $\mathbf{y}$ auf W ist der Vektor aus W, der kleinsten Abstand zu $\mathbf{y}$ hat.

Mit anderen Worten: Für alle $\mathbf{v} \in W$ mit $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$ gilt

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2$$



Beweis: Sei $v \neq \hat{y} \in W$

$$\|y - v\|^2 = \|\underbrace{y - \hat{y}}_{=z} + \underbrace{\hat{y} - v}_{\in W}\|^2$$

$$= \|y - \hat{y}\|^2 + \underbrace{\|\hat{y} - v\|^2}_{>0} > \|y - \hat{y}\| \quad \blacksquare$$

Beispiel

- Sei $H \subseteq \mathbb{R}^3$ der 2-dimensionale Unterraum (Ebene) der von

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_1 \perp u_2$

aufgespannt wird

$$\frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

- Sei $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{u_2^T \cdot y}{u_2^T \cdot u_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Berechne den zu $\mathbf{y}$ nächsten Punkt in H

$$\hat{y} = \frac{u_1^T \cdot y}{u_1^T \cdot u_1} u_1 + \frac{u_2^T \cdot y}{u_2^T \cdot u_2} u_2 = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 76

Sein $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ *eine orthonormale Basis des Unterraums* $H \subseteq \mathbb{R}^n$.
Für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathbf{proj}_H(\mathbf{y}) = \overbrace{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1}^{u_1 \cdot (u_1^T \cdot y)} + \cdots + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p.$$

Ist U *die Matrix*

$$U = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_p), \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

dann gilt

$$\mathbf{proj}_H(\mathbf{y}) = \underbrace{\boxed{U \cdot U^T}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$$\mathrm{Proj}_H(y) = u_1(u_1^T \cdot y) + u_2(u_2^T \cdot y) \cdots + u_p(u_p^T \cdot y)$$

$$= (u_1 \cdot u_1^T) \cdot y + (u_2 \cdot u_2^T) \cdot y + \cdots + (u_p \cdot u_p^T) \cdot y = \overbrace{\left[\sum_{i=1}^{p} (u_i \cdot u_i^T)\right]}^{u \cdot u^T} \cdot y$$

Das Gram-Schmidt Verfahren

- Gegeben: Linear unabhängige $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$

$\text{Span}\{x_1, \ldots, x_p\} = W$

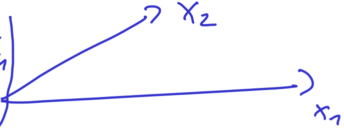
- Ziel: Berechne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ mir den folgenden Eigenschaften
  - i) $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ immer wenn $i \neq j$
  - ii) Für alle $\ell \in \{1, \ldots, p\}$ gilt

$$\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\ell\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{x_1}}{V_1}, \quad \overbrace{x_2 - \frac{x_1^T \cdot x_2}{x_1^T \cdot x_1} \cdot x_1}^{V_2}$$

$p=2$

$$(x_1, x_2) = (V_1\, V_2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1^T \cdot x_2}{x_1^T \cdot x_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



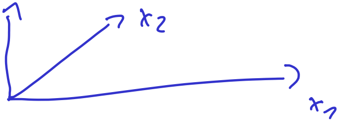
$v_1 = x_1$

$v_2 = x_2 - \frac{x_1^T \cdot x_2}{x_1^T \cdot x_1} \cdot V_1$

$x_2 = V_2 + \frac{x_1^T \cdot x_2}{x_1^T \cdot x_1} \cdot V_1$

Beispiel

- $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

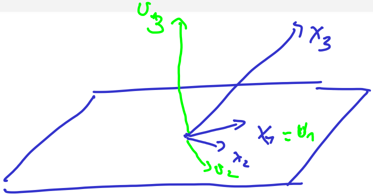


$$V_1 = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{\cancel{18}}{\cancel{45}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Beispiel

- $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$v_2 = x_2 - \frac{x_2^T \cdot x_1}{x_1^T \cdot x_1} \cdot x_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

v_3 ist orthogonal zu v_1 und v_2

$$(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 2/4 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1} \cdot v_1 - \frac{x_3^T \cdot v_2}{v_2^T \cdot v_2} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j$ bestimmt sind ...

$x_1, \ldots, x_p$

- Die $\mathbf{v}_i$ sind orthogonal
- Für $\ell \in \{1, \ldots, j\}$ gilt

$v_1, \ldots, v_p$

- $v_i \perp v_j$, $i \neq j$
- $\operatorname{span}(x_1, \ldots, x_\ell) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_\ell)$

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\ell\} = \mathrm{Span}\{\underline{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell}\}$$

$$v_{\ell+1} = x_{\ell+1} - \frac{x_{\ell+1}^T \cdot v_1}{v_1^T \cdot v_1} \cdot v_1 - \cdots - \frac{x_{\ell+1}^T \cdot v_\ell}{v_\ell^T \cdot v_\ell} \cdot v_\ell .$$

$v_{\ell+1} \perp v_j$, $j \neq \ell+1$

$$v_{\ell+1}^T \cdot v_1 = \left(x_{\ell+1}^T - \lambda_1 \cdot v_1^T - \cdots - \lambda_\ell \cdot v_\ell^T\right) \cdot v_1 = x_{\ell+1}^T \cdot v_1 - x_{\ell+1}^T v_1$$

$$= 0 .$$

Das Gram-Schmidt Verfahren

Satz 77

Seien $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ *eine Basis eines Unterraums* W *von* $\mathbb{R}^n$. *Wir definieren*

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$
- $\vdots$
- $\mathbf{v}_p = \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \cdot \mathbf{v}_{p-1}}\mathbf{v}_{p-1}.$

Dann ist $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *eine orthogonale Basis von* W *und für alle* $\ell \in \{1, \ldots, p\}$ *gilt*

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\ell\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}.$$

Die QR-Zerlegung

Satz 78

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten. Dann kann* A *in der Form*

$$A = Q \cdot R$$

faktorisiert werden, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *eine Matrix mit orthonormalen Spalten und* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine obere Dreiecksmatrix mit echt positiven Diagonaleinträgen ist.*

Bemerkung: Die Spalten von Q sind eine orthonormale Basis von $\mathrm{Col}(A)$

Beispiel

Berechne die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$