Heute (12.11.2013):

- Textbuch Kapitel 5.1, 5.2
- Eigenwerte und Eigenvektoren
- Das charakteristische Polynom
- Diagonalisierbarkeit

Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition

Ein *Eigenvektor* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ein Vektor $x \neq 0$ aus $\mathbb{R}^n$ mit

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ ist der Eigenwert zum Eigenvektor x.

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \iff A \cdot x - \lambda \cdot x = 0$$

$$\iff A \cdot x - \lambda \cdot I \cdot x = 0 \iff (A - \lambda \cdot I)\, x = 0$$

Feststellung: λ (EW) von $A \iff \det(A - \lambda \cdot I) = 0$

Lineare Unabhängigkeit

$(i \neq j) \Rightarrow (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Satz 55

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn $v_1, \ldots, v_p$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\underline{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}$ sind, dann ist $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linear unabhängig.

<u>Beweis:</u> Induktion über p.

<u>$p=1$</u> Menge ist $\{v_1\}$ $\overset{\neq 0 \text{ (Def)}}{\Rightarrow}$ $\{v_1\}$ ist linear unabh.

<u>$p \geq 1$</u>: $p \to (p+1)$ Seien $v_1, \ldots, v_{p+1}$ Ei. Vekt. zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$. z.z.: $v_1, \ldots, v_{p+1}$ lin. unabh.

<u>z.z. ist:</u> $\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_{p+1} \cdot v_{p+1} = 0$ dann gilt: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{p+1} = 0$

$$A(\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_{p+1} \cdot v_{p+1}) = \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_{p+1} \beta_{p+1} v_{p+1}$$

$$A(\beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_{p+1} \cdot v_{p+1}) = \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_{p+1} \cdot \beta_{p+1} \cdot v_{p+1} = 0$$

$$(*) \qquad \cdot \lambda_{p+1} \quad \Big| \qquad \beta_1 v_1 + \dots \quad + \quad \beta_{p+1} \cdot v_{p+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{p+1})}_{\neq 0} \beta_1 \underline{v_1} + \dots + \underbrace{(\lambda_p - \lambda_{p+1})}_{\neq 0} \cdot \beta_p \cdot \underline{v_p} = 0$$

Induktionsvor.

$\Rightarrow \quad \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$ mit (*) folgt auch

$\beta_{p+1} \cdot v_{p+1} = 0 \quad \underset{v_{p+1} \neq 0}{\Rightarrow} \quad \beta_{p+1} = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_{p+1}$ l. unabh. $\square$

Zum Besseren Verständnis zeigen wir den Satz mit $p=2$.

D.h. v_1, v_2 EV. zu EW $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ lin. unabh.

z.z. $\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$.

Sei $\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 = 0$.

$$0 = A \cdot 0 = A \cdot (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$$
$$= \lambda_1 \beta_1 v_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot v_2$$

$$\rightarrow \quad 0 = \beta_1 v_1 + \beta_2 \cdot v_2 \quad \Big| \cdot \lambda_2$$

$-$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot \beta_1 \cdot \underbrace{v_1}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \beta_1 = 0$$
$$\Rightarrow \beta_2 = 0$$

Das charakteristische Polynom

- Beispiel: Finde alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Eigenwerte.

$\lambda = -7$ und $\lambda = 3$.

λ ist EW von A $\iff$ $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$

$$\iff \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Charakteristische Polynom von A. !!

$$\iff (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = 0 \iff \overbrace{\lambda^2 + 4\lambda - 21}^{\text{Charakteristische Polynom von A. !!}} = 0$$

$$\iff (\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda = -7$, $\lambda = 3$

Satz über invertierbare Matrizen (Ergänzung)

Satz 19 (Ergänzung)

Eine $\mathbb{R}^{n\times n}$-matrix A ist genau dann invertierbar, wenn

s) die Zahl 0 kein Eigenwert von A ist.

t) $\det(A) \neq 0$. $\leftarrow$

$$\det(A - 0 \cdot I) = 0$$

$$\shortparallel$$

$$\det(A)$$

Das charakteristische Polynom

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei λ eine Variable. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{- 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}\underbrace{+ 0 \cdots}$$

$$\Rightarrow (3-\lambda) \cdot (1-\lambda)^2$$

$$- 2 \cdot 2 (1-\lambda)$$

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme das charakteristische Polynom von A.

$$p(\lambda) = (5-\lambda)(3-\lambda)(8-\lambda)(3-\lambda)$$

Vielfachheit von EW λ_1 $\max \{ i \in \mathbb{N}_{\geq 1} : (\lambda - \lambda_1)^i$ teilt $p(\lambda) \}$

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme das charakteristische Polynom von A.
- Der Eigenwert 3 hat *Vielfachheit* 2.
- Die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwertes ist seine Vielfachheit als Wurzel des charakteristischen Polynoms.

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme das charakteristische Polynom von A.
- Der Eigenwert 3 hat *Vielfachheit* 2.
- Die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwertes ist seine Vielfachheit als Wurzel des charakteristischen Polynoms.

Beispiel

- Das charakteristische Polynom einer gegebenen 6×6-Matrix sei $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$.
- Bestimme die Eigenwerte der Matrix mit Ihrer Vielfachheit.

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12)$$

$$= \lambda^4 (\lambda - 6) \quad (\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = 0$ Vielfachheit : 4

$\lambda_2 = 6$ " : 1

$\lambda_3 = -2$ " 1

Beispiel

n beliebig

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Das Charakteristische Polynom von A

1. hat Grad 1 f
2. hat Grad $\leqslant n$ ✓
3. hat Grad $= n$ ✓
4. kann Grad $< n$ haben. f

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda\cdot I_n)$$

$$= \underbrace{(a_{11}-\lambda)}_{\text{grad } (1)} \cdot \overbrace{\det\left(A_{11}-\lambda\cdot I_{n-1}\right)}^{\text{Grad } = n-1 \text{ (per Induktion)}}$$

grad $\leq n-1$

$$- \left[a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & & \\ & & a_{44}-\lambda & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \right] +$$

Ähnlichkeit

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $A = PBP^{-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A, B sind ähnlich.

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

Eigenwerte ähnlicher Matrizen

Satz 56

Ähnliche Matrizen A und B haben dasselbe charakteristische Polynom und also auch dieselben Eigenwerte mit der jeweils selben Vielfachheit.

Beweis: $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$$\det(A) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P^{-1})$$

zz. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda \cdot I)$

$$\det(P) \cdot \det(P^{-1}) = 1$$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda \cdot I) \cdot \det(P)$$

$$= \det\left(P^{-1}(A - \lambda I) \cdot P\right) = \det\left[\underbrace{P^{-1} \cdot A \cdot P}_{=B} - \lambda \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{=I}\right]$$

Warnungen

A B EW: 2 Vielf. 2

- Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \cancel{1}\,2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  sind nicht ähnlich (warum?) obwohl sie dieselben Eigenwerte (mit entsprechenden Vielfachheiten) haben.
- Ähnlichkeit und Zeilenäquivalenz sind nicht das gleiche!

P invertierbar: $P \cdot B \cdot P^{-1} = B$

Diagonalmatrizen

$D = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto D \cdot x$

$\underbrace{(T \circ \dots \circ T)}_{\substack{j\text{-mal} \\ \text{ausgeführt}}}(x) = D^j \cdot x = \begin{pmatrix} a_1^j & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^j \end{pmatrix} \cdot x$

- $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Beschreibe D^j für $j \geqslant 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{j\text{-mal}}$$

$$\begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

- Betrachte $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
- Berechne A^i für $i \geqslant 1$

Eigenwerte: $\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8$

$= 7 - 8\lambda + \lambda^2 + 8$

$= \lambda^2 - 8\lambda + 15$

$= (\lambda - 3)(\lambda - 5)$

EW: 3, 5

EV zu EW 3:

Lösung $\neq 0$ $\begin{pmatrix} 7-3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist EV. zum EW 3

EV zu EW 5:

Suche Lsg $\neq 0$ von

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

sind Eigenvektoren.

Beispiel

V invertierbar, da $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind.

Satz 5.5

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, EW 5

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ EW 3

sind Eigenvektoren.

- Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = (v_1 \ v_2)$$

- Berechne A^i für $i \geqslant 1$

$$V^{-1} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = (5 \cdot v_1 \quad 3 \cdot v_2)$$

$$V^{-1} \cdot (5 v_1 \quad 3 \cdot v_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[V^{-1} A \cdot V] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = V \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} V^{-1}$$

Beispiel

- Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Berechne A^i für $i \geqslant 1$

$$A = V \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} V^{-1}$$

$\underline{i \geq 1}$

$$\mathrm{I}$$

$$A^i = \underbrace{V \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} V^{-1} \cdot V \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \cdots V \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} V^{-1}}_{i\text{-x}}$$

$$= V \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^i \cdot V^{-1}.$$

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *diagonalisierbar*, wenn es eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P gibt mit

$$A = PDP^{-1}.$$

$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

$A^j = P \cdot D^j \cdot P^{-1}$ $\quad j \geq 1 \quad$ gilt

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

$A \cdot \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} =$ i-te Spalte von A mit d_i mult.

$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} A =$ i-te Zeile "

Satz 57

Eine $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

"$\Leftarrow$": Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von A mit EWten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Gesucht: $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ mit

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P = (v_1, \dots, v_n)}$$

$A \cdot P = (A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_n)$
$= (\lambda_1 v_1 \; \lambda_2 v_2 \cdots \lambda_n v_n) = P \cdot D$ $\Rightarrow$ $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Satz 57

Eine $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

„$\Rightarrow$" Sei $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Die n linear unabhängigen Eigenvektoren von A

sind die Spalten von P.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

Satz 58

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit

$$A = PDP^{-1}.$$

Dann sind die Spalten von P n linear unabhängige Eigenvektoren von A und die Diagonalelemente von D die dazugehörigen Eigenwerte.

p_j sei j-te Spalte von P

$$A \cdot p_j = P \cdot \underbrace{D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot p_j}_{= e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}}_{d_j \cdot e_j} = d_j \cdot p_j$$

j-te Stelle

Diagonalisierung in 4 Schritten

Diagonalisiere die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Finde Eigenwerte
2. Finde Basen der Eigenräume
3. Konstruiere P aus den Basen in Schritt 2
4. Konstruiere D aus den dazugehörigen Eigenwerten.

1.) Berechne das charakt. Polynom $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$$
p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix}
\qquad
\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & \\ + & & & \\ - & & & \end{matrix}
$$

$$
= (1-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ -2-\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix} + 3\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2-\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix}}_{=0}
$$

$$
= (1-\lambda)\left[(5+\lambda)(2+\lambda) - 3(2+\lambda)\right] + 0
$$

$$
= (1-\lambda)(10+7\lambda+\lambda^2-6-3\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4)
$$

$$
= (1-\lambda)(\lambda+2)^2
$$

Eigenwerte: $-2, -2, 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum zum EW -2:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} x = 0 \right\}$$

$$= \operatorname{Kern} \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenraum zum EW 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

x_3

frei

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n, \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array} \right\}$$

Basis: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des Eigenraums zum EW 1.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis des ER ~~vom~~ bzg. EW 1.

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis " bzg. EW -2

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot D \cdot P^{-1} = A$$

n verschiedene Eigenwerte

Satz 59 A

Eine $n \times n$-Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

<u>Beweis:</u> Seien $v_1, \dots, v_n$ E.V. zu den verschiedenen EW-ten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Satz 55 $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig.

Satz 57. $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar. $\blacksquare$

Übung

- Kann eine $n \times n$ Matrix mehr als n Eigenwerte haben?

Nein, denn das Charpoly hat Grad n und somit höchstens n Nullstellen.
jede NS. von Charpoly ist Eigenwert von A.

$\Rightarrow$ höchstens n EW.

Weniger als n Eigenwerte

Satz 60

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

a) *Für $1 \leqslant k \leqslant p$ ist die Dimension des Eigenraumes von λ_k höchstens die Vielfachheit des Eigenwertes λ_k.*

b) *Die Matrix A ist diagonalisierbar dann und nur dann, wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume der λ_k gleich n ist und dies passiert genau dann wenn*

   i) *Das charakteristische Polynome zerfällt in Linearfaktoren und*

   ii) *Die Dimension des Eigenraums von λ_k ist genau die Vielfachheit von λ_k.*

c) *Ist A diagonalisierbar und $\mathcal{B}_k$ eine Basis des Eigenraums von λ_k, dann ist $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht.*

Beispiel

Parameter Satz 60: $n=4$. Vielfachheit von 5: 2
" -3 : 2

- Ist die folgende Matrix diagonalisierbar?

charpoly: $(5-\lambda)^2(-3-\lambda)^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

-3: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ⇒ Basis des ER von -3

⇒ Dim ER(3) = 2

5: Eigenraum zu EW 5 $= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}}_{\dim(\mathrm{Kern}) = 2} x = 0 \right\}$

⇒ ∃ Basis $\{u_1, u_2\}$ des Eigenraums bzgl. EW 5

⇒ Dim ER(5) = 2