Lineare Algebra

Heute (05.11.2013):

- Textbuch Kapitel 4.4, 4.5, 4.6
- Koordinaten
- Dimension
- Basiswechsel

Eindeutige Darstellung durch Koordinaten

i) $b_1, \dots, b_n$ lin. unabh.

ii) $\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\} = V$

Satz 45

Sei $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Für jedes $\mathbf{x} \in V$ gibt es einen eindeutigen Vektor

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n$.

Warum: $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ wegen ii)

Eindeutigkeit folgt aus i) denn ist $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

und $x = y_1 b_1 + \dots + y_n \cdot b_n$

dann gilt $x = x_1 b_1 + \dots + x_n \cdot b_n$

$0 = (y_1 - x_1) b_1 + \dots + (y_n - x_n) \cdot b_n$

mindestens ein $y_i - x_i \neq 0$

↯ zu i)

Beispiel

$\mathbf{P}_2$: Menge der Polynome vom Grad ≤ 2

$\mathcal{B} = \{2, x+1, x^2+x\}$ ist eine Basis von $\mathbf{P}_2$. (Warum?)

Berechne die Koordinaten von $p(x) = 4 + 3x + x^2$.

z.z.:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $a + b\cdot x + c\cdot x^2$ LK von $2,\ x+1,\ x^2+x$

Eine solche LK ist von der Form

$$x_1 \cdot 2 + x_2(x+1) + x_3(x^2+x)$$

$$= [x_1 \cdot 2 + x_2] + [x_2 + x_3]\cdot x + [x_3]\cdot x^2$$

diese LK soll das Polynom $a + b\cdot x + c\cdot x^2$ darstellen.

Beispiel

$\mathcal{B} = \{2, x+1, x^2+x\}$ ist eine Basis von $\mathbf{P}_2$. (Warum?)

Berechne die Koordinaten von $p(x) = 4 + 3x + x^2$.

$$[x_1 \cdot 2 + x_2] + [x_2 + x_3] \cdot x + [x_3] \cdot x^2 = a + bx + cx^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= a \\ x_2 + x_3 &= b \\ x_3 &= c \end{aligned}$$

umschreiben in

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

GLS (I) ist für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ lösbar $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ ist eine Basis.

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

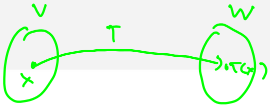
Beispiel

$\mathcal{B} = \{2, x+1, x^2+x\}$ ist eine Basis von $\mathbf{P}_2$. (Warum?)

Berechne die Koordinaten von $p(x) = 4 + 3x + x^2$.

Probe: $1 \cdot (2) + 2 \cdot (x+1) + 1 \cdot (x^2+x)$

$= 2 + 2x + 2 + x + x^2 = 4 + 3x + x^2$ (✓)



Definition

Seien V und W Vektorräume und $T : V \to W$ eine Funktion. Die Funktion T ist eine *lineare Abbildung*, falls

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, und
2. $T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in V$.

linear

Frage:

$$\boxed{V = \{ \dashv \} \quad W = \mathbb{R}^1}$$

$$\boxed{T(\dashv) = 1}$$

nicht linear.

$$\boxed{T(\dashv) = 0}$$

$$1 = T(\dashv) = T(\dashv + \dashv) \neq T(\dashv) + T(\dashv) = 2$$

denn:

Die Koordinatenabbildung

$x \in V: \quad x = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n \qquad [x]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Satz 46

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Die Abbildung

$$[\cdot]_\mathcal{B} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

welche einen Vektor auf seine Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ abbildet ist eine bijektive lineare Abbildung.

Beweis: Zu 1.) Seien $u, v \in V$. z.z.: $[u+v]_\mathcal{B} = [u]_\mathcal{B} + [v]_\mathcal{B}$

Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [u]_\mathcal{B}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} [v]_\mathcal{B} \Rightarrow$ $u = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$

$v = y_1 \cdot v_1 + \dots + y_n v_n$

Zu 2.) ähnlich!

$\Rightarrow u + v = (x_1 + y_1) \cdot v_1 + \dots + (x_n + y_n) \cdot v_n$

$\Rightarrow [u+v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \Leftarrow [u]_\mathcal{B} + [v]_\mathcal{B}$

Die Koordinatenabbildung

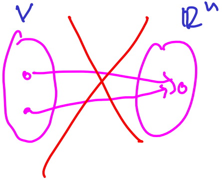
Satz 46

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Die Abbildung

$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

welche einen Vektor auf seine Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ abbildet ist eine bijektive lineare Abbildung.

bijektiv:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\shortparallel$

Injektivität: $[u]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow$ injektiv.

$\Rightarrow$ $u = x_1 v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n$

$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n$ $=$

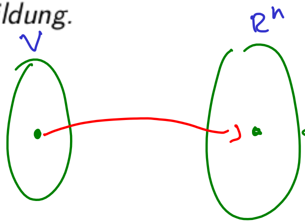
Satz 46

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Die Abbildung

$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

welche einen Vektor auf seine Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ abbildet ist eine bijektive lineare Abbildung.

<u>Surjektiv:</u>



Jeder wird getroffen.

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist Koordinatenvektor von: $x_1 v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n \in V$.

Beispiel

Betrachte die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

Welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beschreibt die lineare Abbildung $[\cdot]_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Standardmatrix.

gesucht: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Falsch!

$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ Korrekt.

Satz 47

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Jede Teilmenge $M = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\} \subseteq V$ mit $p \geqslant n+1$ Vetoren ist linear abhängig.

Bew.: $u_1, \ldots, u_p \in V$ mit $p \geq n+1$.

z.z. $\exists\ x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ nicht alle $= 0$ mit

$x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p = 0 \iff \mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = [x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p]_B$

$[0]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = [u_1]_B \cdot x_1 + \cdots + [u_p]_B \cdot x_p$

$\overset{(*)}{=} \left([u_1]_B \cdots [u_p]_B \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

(*) ist von der Form

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

(mehr Spalten als Zeilen)

$\Rightarrow \exists\ x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $A \cdot x = 0$

$\blacksquare$

Satz 48
Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ eine Basis von V. Dann hat jede andere Basis von V genau n Elemente.

Definition
Die Zahl n von oben ist die *Dimension* des Vektorraums V.

<u>Beweis:</u> Sei $\{v_1, \ldots, v_p\}$ eine Basis mit $p \neq n$ vielen Elementen.

<u>1. Fall:</u> $p > n$: $\overset{\text{Satz 47}}{\Rightarrow}$ $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linear abhängig ↯

<u>2. Fall</u> $p < n$ $\overset{\text{Satz 47}}{\Rightarrow}$ $\{b_1, \ldots, b_n\}$ lin. abhängig ↯

$\square$

Beispiel

- Ist $x, 1 + x^2$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$? :
- Ist $1, x, x^2, 1 + x^2$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$?

$\{1, x, x^2\}$ ist Basis. (bei endl. & Erzeugenden-system).

Wenn $x, 1+x^2$ eine Basis wäre, dann wäre $\{1, x, x^2\}$ linear abhängig (Satz 47).

$\underline{2+x^2}$ keine LK. von $x, 1+x^2$.

$\alpha \cdot x + \beta(1+x^2) = \beta + \alpha \cdot x + \beta \cdot x^2$

Nein, da $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$ und 4 Elemente (> 3).

$$[a + bx + cx^2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Basiswechsel

Beispiel:

- Seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ und $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ Basen des Vektorraums V.
- Wir kennen die Koordinaten:

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$4 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = b_1$

$-6 \cdot c_1 + c_2 = b_2$

- Sei ferner $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Berechne $[x]_{\mathcal{C}}$.

$$x = 3 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 = 3 \cdot (4 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2) + 1 \cdot (-6 \cdot c_1 + c_2)$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot c_1 - 6 \cdot c_1 + 3 \cdot 1 \cdot c_2 + c_2$$

$$[x]_C = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 6 \\ 3 \cdot 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 49

Seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *und* $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ *Basen des Vektorraums* V.
Es existiert eine eindeutige Matrix $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

für alle $\mathbf{x} \in V$.
Die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ *sind die* $\mathcal{C}$*-Koordinaten von* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = ([\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}).$$

Beispiel

- $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ Basen von $\mathbb{R}^2$.
- Berechne $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$

$$[b_1]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{pmatrix} [b_1]_C & [b_2]_C \end{pmatrix}$$

$$[b_2]_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \boxed{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = \boxed{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

löse beide GLS gleichzeitig.

$$b_1 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \boxed{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = \boxed{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

löse beide GLS gleichzeitig.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 7 & -35 & -21 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{7} \rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

$$[b_1]_c = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$[b_2]_c = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Was ist $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$?

- Seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ und $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ Basen des Vektorraums V.
- Die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ sind die Koordinaten der $\mathbf{b}_i$ bzgl $\mathcal{C}$.
- Also sind diese linear unabhängig.

$\Rightarrow \underset{C\leftarrow B}{P}$ ist invertierbar.

$$[x]_e = \underset{C\leftarrow B}{P} \cdot [x]_B \quad \Big| * \big(\underset{C\leftarrow B}{P}\big)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \big(P_{C\leftarrow B}\big)^{-1} [x]_e = [x]_B$$

$$\Rightarrow \underset{B\leftarrow C}{P} = \big(\underset{C\leftarrow B}{P}\big)^{-1}$$

Beispiel

- $\mathcal{B} = \{1, x\}$ und $\mathcal{C} = \{2, 1 + x\}$ sind Basen von $\mathbb{P}_1$.
- Berechne $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} [1]_{\mathcal{C}} & [x]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = 2 \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

- $\mathcal{B} = \{1, x\}$ und $\mathcal{C} = \{2, 1 + x\}$ sind Basen von $\mathbb{P}_1$.
- Berechne $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

Beispiel

- $\mathcal{B} = \{1, x\}$ und $\mathcal{C} = \{2, 1 + x\}$ sind Basen von $\mathbb{P}_1$.
- Berechne $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.