Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série SAGE 21 avril 2011

EPFL*ove* est une agence matrimoniale qui s'est spécialisée dans la mise en relation deux individus par affinités (le so-called matchmaking). Elle est classique, mais aussi un peu passéiste. En effet, son service se limite à mettre en relation un homme avec une femme [1]. Comme chaque bonne agence, elle entretient un grand fichier d'hommes et femmes avec leurs préférences. Le modèle d'affaires de EPFL*ove* consiste à coupler des hommes à des femmes de telle sorte que le chiffre d'affaires de EPFL*ove* soit maximisé. Une relation établie implique une prime payée par l'homme et par la femme engagés. Le montant de la prime est déterminé par le goût des clients, c'est-à-dire que chaque homme donne en avance un score à chaque femme dans le fichier de EPFL*ove* et vice versa pour les femmes. Le montant à payer est le score qui a été fixé pour le partenaire affecté. Le bénéfice de EPFL*ove* est alors la somme de ces deux valeurs pour chaque relation établie. Supposez que vous êtes embauché comme consultant pour implémenter un programme qui optimise le bénéfice de EPFL*ove* !

1. Pour connaître une agence très moderne qui admet tous types de relations, il faut attendre le cours 'Combinatorial Optimization' le semestre prochain.

Comme vous le soupçonnez probablement déjà, il s'agit de trouver un couplage maximum dans un graphe biparti. Définissez un graphe biparti $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ avec des ensembles $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ appropriés. Donnez des poids c positifs sur les arêtes de sorte que vous cherchiez un couplage dans G tel que la somme des poids des arêtes choisies soit maximisée. Vous pouvez vous référer à l'exercice 2 de la série 1 pour un exemple.

Le programme voulu respecte l'interface `couplage(m,f,M,F)` et retourne une liste C des couples. Les paramètres de l'interface sont le nombre m des hommes et f des femmes dans le fichier. M et F sont des matrices de taille respectivement $m \times f$ et $f \times m$ qui décrivent les scores. La liste C contient des paires d'indices (i, j) pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq f$ si un couple est formé entre l'homme i et la femme j.

Remarque : On peut même imposer que les couples soient *stables*, c'est-à-dire : Pour chaque homme qui est en couple avec femme f, il n'existe pas de femme f' (actuellement en couple avec m') telle qu'il y a un attrait à la fois pour m et f' dans le couple (m, f') (c-à-d $M[m][f'] > M[m][f]$ et $F[f'][m] > F[f'][m']$). En d'autres termes, il n'y a pas d'attrait pour une aventure dans un couplage stable.

En termes mathématiques, on peut ajouter la contrainte

$$\sum_{f' :\, M[m][f'] > M[m][f]} x_{(m,f')} + \sum_{m' :\, F[f][m'] > F[f][m]} x_{(m',f)} + x_{(m,f)} \geq 1 \qquad \forall (m, f) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

dans la description du polyèdre de couplage et le polyèdre reste intégral[2], même si la matrice n'est plus TUM. Pour le démontrer, on a besoin de beaucoup d'Optimisation discrète. Vous pouvez quand-même expérimenter un peu avec ce programme linéaire.

Des instances de test seront disponibles sur le site web du cours.

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre une solution à l'exercice SAGE sur `http ://disoptsrv1.epfl.ch/opt11/` avant le début du cours du **05 mai** et une version écrite avant (le début de) la séance. On peut ainsi obtenir deux points bonus. L'exercice est le même pour tous les étudiants.

2. Nous supposons que $\forall (m, f) \neq (m', f') \in A \times B$, on a $M[m][f] \neq M[m'][f']$ et $F[f][m] \neq F[f'][m']$.