# BEWEIS EINER BAUDET'SCHEN VERMUTUNG

VON

BARTEL L. VAN DER WAERDEN

(in Hamburg).

Baudet hat vermutet dass für jedes $l$ gilt:

*Behauptung 1* ($l$). *Ist die unendliche Zahlenfolge 1, 2, 3, ... in zwei fremde Klassen eingeteilt, so liegt in einer dieser Klassen eine arithmetische Progression von $l$ Zahlen.*

Ich werde allgemeiner zeigen, dass für jedes $l$ und jedes $k$ gilt:

*Behauptung 2* ($l$, $k$). *Es existiert eine Zahl $n = n(l, k)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist die endliche Zahlenfolge 1, 2, ..., $n$ in $k$ fremde Klassen eingeteilt, so liegt in einer dieser Klassen eine arithmetische Progression von $l$ Zahlen*[1].

Die Behauptung ist für $l = 2$ trivial: es ist $n(2, k) = k + 1$. Es sei also $l > 2$, und es sei Behauptung $2(l-1, k)$ bereits bewiesen (für alle $k$).

Nach Voraussetzung ist eine Einteilung der Zahlenfolge $S_n$, bestehend aus den Zahlen 1, 2, ..., $n$, in $k$ fremde Klassen gegeben. Wir schreiben $a \sim b$, wenn die Zahlen $a$ and $b$ derselben Klasse angehören; $n$ wird vorläufig so gross gewählt dasz alle im folgenden zu betrachtenden Systeme noch innerhalb des Systems 1, 2, ..., $n$ liegen; wie gross $n$ genau sein muss, wird später angegeben.

*Erste Vorbemerkung.* Es bezeichne immer $S_w$ ein System von $w$ aufeinanderfolgende Zahlen in $S_n$. Besteht $S_w$ aus den Zahlen $a, a+1, \ldots, a+w-1$, und $S'_w$ aus $a', a'+1, \ldots, a'+w-1$, so werden $S_w$ und $S'_w$ *zur selben Klasse* gerechnet (in Zeichen $S_w \sim S'_w$), falls

$$\begin{gathered} a \sim a' \\ a+1 \sim a'+1 \\ \cdots \\ a+w-1 \sim a'+w-1. \end{gathered}$$

[1]) Die Vermutung, dass die Verallgemeinerung von $k = 2$ auf beliebige $k$ für die Induktion vorteilhaft sein könnte, stammt von Herrn Artin.

Jede Zahl $a+\lambda$ von $S_w$ geht also durch Verschiebung um $a'-a$ in eine Zahl $a'+\lambda$ derselben Klasse über.

Die Anzahl der Klassen von Systemen $S_w$ ist offenbar höchstens $k^w$, falls $w$ festgehalten wird.

Zwei Systeme $S_w$, $S'_w$ heissen *aufeinanderfolgend*, wenn die Anfangsziffern aufeinander folgen, also wenn $a'=a+1$. Unter einen *arithmetischen Progression von Systemen* $S_w$, $S'_w, \ldots$ verstehen wir eine solche Folge, wo die Anfangszahlen $a, a', \ldots$ eine arithmetische Progression bilden.

Man kann die als bewiesen angenommene Behauptung $2(l-1, k)$ auch auf die Systeme $S_w$ in $S_n$ anwenden; diese sind ja numeriert und in $k^w$ fremde Klassen eingeteilt. Man findet, dass *unter* je $n(l-1, k^w)$ *aufeinanderfolgende Systeme* $S_w$ *in* $S_n$ *eine zu einer Klasse gehörige arithmetische Progression existiert.*

*Zweite Vorbemerkung.* Nach Annahme liegt in jedem hinreichend langen System $S_m$ eine arithmetische Folge von $l-1$ Zahlen derselben Klasse. Wenn man nun $m$ noch etwas grösser macht, so kann man sogar erreichen dass in $S_m$ eine arithmetische Progression von $l$ Zahlen liegt, von denen die ersten $l-1$ in einer Klasse liegen. Man hat zu dem Zweck nun

$$m \geqq n(l-1, k) + \left[\frac{n(l-1, k)-1}{l-2}\right]$$

(wo die eckige Klammer das grösste Ganze bedeutet) zu wählen; dann finden sich unter den ersten $n(l-1, k)$ Zahlen von $S_m$ schon eine arithmetische Progression von $l-1$ Zahlen derselben Klasse; die Differenz dieser Folge ist höchstens

$$\left[\frac{n(l-1, k)-1}{l-2}\right]$$

also liegt das $l$-te Glied der Progression auch noch in $S_m$. Es braucht aber nicht zur selben Klasse wie die ersten $l-1$ Zahlen zu gehören.

Was eben für arithmetische Progressionen von *Zahlen* gesagt ist, gilt (nach der *ersten* Vorbemerkung) wörtlich für *Systeme* $S_w$: unter $m$ aufeinanderfolgende Systeme $S_w$ von $S_n$ findet sich notwendig eine arithmetische Progression von $l$ solchen Systemen, deren erste $l-1$ Glieder einer Klasse angehören, vorausgesetzt dass

$$m \geqq n(l-1, k^w) + \left[\frac{n(l-1, k^w)-1}{l-2}\right]$$

Daraus folgt unmittelbar:

*Innerhalb eines Systems $S_{\varphi(w)}$ von*

$$\varphi(w) = n(l-1, k^w) + \left[\frac{n(l-1, k^w)-1}{l-2}\right] + w - 1$$

*aufeinanderfolgenden Zahlen von $S_n$ gibt es notwendig eine arithmetische Progression von $l$ Systemen $S_w$, von denen die ersten $l-1$ einer Klasse angehören.*

Auf Grund dieser Vorbemerkungen wird nun der *Beweis* folgendermassen geführt:

Wir setzen $n_0 = 1$, und

$$n_{i+1} = \varphi(n_i).$$

Dann gibt es in jedem System $S_{n_{i+1}}$ eine arithmetische Folge von $\lambda$ Systemen $S_{n_i}$ von denen die ersten $l-1$ einer Klasse angehören. Insbesondere setzen wir

$$n = n(l, k) = n_k.$$

Im System $S_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ liegt eine arithmetische Progression von $l$ Systemen

$$S^0_{n_{k-1}}, \; S^1_{n_{k-1}}, \ldots, S^{l-1}_{n_{k-1}},$$

von denen die ersten $l-1$ einer Klasse angehören. Ebenso liegt in $S^0_{n_{k-1}}$ eine Progression

$$S^0_{n_{k-2}}, \; S^1_{n_{k-2}}, \ldots, S^{l-1}_{n_{k-2}},$$

mit derselben Eigenschaft, usw.; allgemein in $S^0_{n_{i+1}}$ eine Progression

$$S^0_{n_i}, \; S^1_{n_i}, \ldots, S^{l-1}_{n_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

von denen die ersten $l-1$ Glieder einer Klasse angehören. Die letzte Progression

$$S^0_{n_0}, \; S^1_{n_0}, \ldots, S^{l-1}_{n_0}$$

besteht (wegen $n_0 = 1$) aus einzelnen Zahlen.

Jetzt soll gezeigt werden — und damit werden wir fertig sein — dass es möglich ist, durch eine geeignete Auswahl von Zahlen aus unseren arithmetischen Progressionen von *Systemen* eine arithmetische Progression von *Zahlen* derselben Klasse herzustellen.

Jedes folgende System des Reihe (1) ensteht aus dem vorangehenden durch Verschiebung um eine feste Zahl $d_{i+1}$. Also entsteht $S^{\lambda}_{n_i}$ aus $S^0_{n_i}$ durch Verschiebung um $\lambda d_{i+1}$.

Das System $S^0_{n_0}$ bestehe aus der Zahl $a_0$. Dann besteht $S^{\lambda_1}_{n_0}$ aus der Zahl

$$a_0 + \lambda_1 d_1 \qquad (\lambda_1 \leqq l-1).$$

Diese Zahl liegt also sicher in $S^0_{n_1}$. Also liegt die Zahl

$$a_0 + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \ \ (\lambda_1,\ \lambda_2 \leqq l-1)$$

in $S^{\lambda_2}_{n_1}$, also in $S^0_{n_2}$. So weiterschliessend sieht man, dass die Zahl

$$a_0 + \lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_{i+1} d_{i+1} \ \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i+1} \leqq l-1) \quad . \ (2)$$

in $S^{\lambda_{i+1}}_{n_i}$, also in $S^0_{n_{i+1}}$ liegt.

Ist $\lambda_{i+1} < l-1$, so ist $S^{\lambda_{i+1}}_{n_i} \sim S^0_{n_i}$, also

$$a_0 + \lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_{i+1} d_{i+1} \sim a_0 + \lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_i d_i.$$

Man kann also, um die Klasse einer Zahl der Gestalt (2) zu bestimmen, den letzten Summanden $\lambda_{i+1} d_{i+1}$ immer weglassen, vorausgesetzt dass $\lambda_{i+1} < l-1$.

Von den $k+1$ Zahlen

$$a_i = a_0 + (l-1) \sum_1^i d_\lambda \ \ (i = 0, \ldots, k)$$

müssen zwei in einer Klasse liegen, weil es nur $k$ Klassen gibt. Es sei etwa

$$a_i \sim a_j \ \ (i < j).$$

Man betrachte die $l$-gliedrige arithmetische Progression

$$\begin{gathered} a_i \\ a_i + \sum_{i+1} d_\lambda \\ a_i + 2 \sum_{i+1} d_\lambda \\ \vdots \\ a_j = a_i + (l-1) \sum_{i+1}^{j} d_\lambda \end{gathered}$$

Die ersten $l-1$ Zahlen dieser Progression liegen (nach der obengenannten Regel über die Weglassung der Summanden) in derselben Klasse wie $a_i$. Nach Voraussetzung tut $a_j$ es auch. Also liegt in dieser Klasse eine $l$-gliedrige arithmetische Progression q. e. d.