

Réduction d'une matrice 7×9 à sa forme échelonnée réduite :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 & 12 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 13 & 11 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 & 13 \\ 1 & 10 & 13 & 21 & 8 & 24 & 16 & 5 & 8 & 19 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	0	0	5	0	24	16	8	6	2
1	5	9	3	6	1	0	1	0	3
1	10	13	11	8	6	3	1	2	4
0	5	4	18	2	18	12	2	7	5
1	10	13	21	8	24	16	5	8	6
0	5	4	13	2	24	17	6	7	7

On choisit le premier pivot. Pas de besoin d'échange de lignes. On commence avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	0	0	0	5	0	24	16	8	6	2
-1	1	5	9	3	6	1	0	1	0	3
-1	1	10	13	11	8	6	3	1	2	4
0	0	5	4	18	2	18	12	2	7	5
-1	1	10	13	21	8	24	16	5	8	6
0	0	5	4	13	2	24	17	6	7	7

Réduction de la colonne 1 par $G_{13}(-1), \dots, G_{17}(-1)$.

$$B \leftarrow G_{13}(-1) \cdots G_{17}(-1)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	0	0	5	0	24	16	8	6	2
0	5	4	3	2	1	0	0	0	3
0	10	8	11	4	6	3	0	2	4
0	5	4	18	2	18	12	2	7	5
0	10	8	21	4	24	16	4	8	6
0	5	4	13	2	24	17	6	7	7

On choisit le deuxième pivot.

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$4/5$	$3/5$	$2/5$	$1/5$	0	0	0	2
0	0	0	5	0	24	16	8	6	3
0	10	8	11	4	6	3	0	2	4
0	5	4	18	2	18	12	2	7	5
0	10	8	21	4	24	16	4	8	6
0	5	4	13	2	24	17	6	7	7

On échange les lignes 2 \leftrightarrow 3 et multiplie la ligne 2 par $1/5$.

$$B \leftarrow M_2(1/5)P_{23}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	2
0	0	0	5	0	24	16	8	6	3
0	10	8	11	4	6	3	0	2	4
0	5	4	18	2	18	12	2	7	5
0	10	8	21	4	24	16	4	8	6
0	5	4	13	2	24	17	6	7	7

Réduction de la colonne 2.

$$B \leftarrow G_{27}(-5) \cdots G_{24}(-10)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	2
0	0	0	5	0	24	16	8	6	3
0	0	0	5	0	4	3	0	2	4
0	0	0	15	0	17	12	2	7	5
0	0	0	15	0	22	16	4	8	6
0	0	0	10	0	23	17	6	7	7

On choisit le troisième pivot.

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$4/5$	$3/5$	$2/5$	$1/5$	0	0	0	2
0	0	0	1	0	$24/5$	$16/5$	$8/5$	$6/5$	3
0	0	0	5	0	4	3	0	2	4
0	0	0	15	0	17	12	2	7	5
0	0	0	15	0	22	16	4	8	6
0	0	0	10	0	23	17	6	7	7

On multiplie la ligne 3 par $1/5$.

$$B \leftarrow M_3(1/5)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	4/5	3/5	2/5	1/5	0	0	0	2
0	0	0	1	0	24/5	16/5	8/5	6/5	3
0	0	0	5	0	4	3	0	2	4
0	0	0	15	0	17	12	2	7	5
0	0	0	15	0	22	16	4	8	6
0	0	0	10	0	23	17	6	7	7

Réduction de la colonne 4.

$$B \leftarrow G_{37}(-10) \cdots G_{34}(-5)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	2
0	0	0	1	0	$\frac{24}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	3
0	0	0	0	0	-20	-13	-8	-4	4
0	0	0	0	0	-55	-36	-22	-11	5
0	0	0	0	0	-50	-32	-20	-10	6
0	0	0	0	0	-25	-15	-10	-5	7

On choisit le quatrième pivot.

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$4/5$	$3/5$	$2/5$	$1/5$	0	0	0	2
0	0	0	1	0	$24/5$	$16/5$	$8/5$	$6/5$	3
0	0	0	0	0	1	$13/20$	$2/5$	$1/5$	4
0	0	0	0	0	-55	-36	-22	-11	5
0	0	0	0	0	-50	-32	-20	-10	6
0	0	0	0	0	-25	-15	-10	-5	7

On multiplie la ligne 4 par $-1/20$.

$$B \leftarrow M_4(-1/20)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/20 & 1/20 & 1/10 & -1/20 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	4/5	3/5	2/5	1/5	0	0	0	2
0	0	0	1	0	24/5	16/5	8/5	6/5	3
0	0	0	0	0	1	13/20	2/5	1/5	4
0	0	0	0	0	-55	-36	-22	-11	5
0	0	0	0	0	-50	-32	-20	-10	6
0	0	0	0	0	-25	-15	-10	-5	7

Réduction de la colonne 6.

$$B \leftarrow G_{47}(25) \cdots G_{45}(55)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/20 & 1/20 & 1/10 & -1/20 & 0 & 0 & 0 \\ -7/4 & -1/4 & 9/2 & -11/4 & 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 3 & -5/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -3/4 & 3/2 & -5/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$4/5$	$3/5$	$2/5$	$1/5$	0	0	0	2
0	0	0	1	0	$24/5$	$16/5$	$8/5$	$6/5$	3
0	0	0	0	0	1	$13/20$	$2/5$	$1/5$	4
0	0	0	0	0	0	$-1/4$	0	0	5
0	0	0	0	0	0	$1/2$	0	0	6
0	0	0	0	0	0	$5/4$	0	0	7

On choisit le cinquième pivot.

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$4/5$	$3/5$	$2/5$	$1/5$	0	0	0	2
0	0	0	1	0	$24/5$	$16/5$	$8/5$	$6/5$	3
0	0	0	0	0	1	$13/20$	$2/5$	$1/5$	4
0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
0	0	0	0	0	0	$1/2$	0	0	6
0	0	0	0	0	0	$5/4$	0	0	7

On multiplie la ligne 5 par -4 .

$$B \leftarrow M_5(-4)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/20 & 1/20 & 1/10 & -1/20 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -18 & 11 & -4 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 3 & -5/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -3/4 & 3/2 & -5/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Réduction à la forme échelonnée

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	4/5	3/5	2/5	1/5	0	0	0	2
0	0	0	1	0	24/5	16/5	8/5	6/5	3
0	0	0	0	0	1	13/20	2/5	1/5	4
0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	6
0	0	0	0	0	0	5/4	0	0	7

Réduction de la colonne 7.

$$B \leftarrow G_{57}(-5/4)G_{56}(-1/2)B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/20 & 1/20 & 1/10 & -1/20 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -18 & 11 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 12 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & 24 & -15 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voilà, la forme échelonnée :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	2
0	0	0	1	0	$\frac{24}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	3
0	0	0	0	0	1	$\frac{13}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	4
0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7

Étape 2 : Réduction à la forme échelonnée réduite

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	4/5	3/5	2/5	1/5	0	0	0	2
0	0	0	1	0	24/5	16/5	8/5	6/5	3
0	0	0	0	0	1	13/20	2/5	1/5	4
0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7

Réduction de la colonne 7 au-dessus du pivot.

$$B \leftarrow G_{35}^T(-16/5)G_{45}^T(-13/20)B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -112/5 & -3 & 288/5 & -176/5 & 64/5 & 0 & 0 \\ -23/5 & -3/5 & 59/5 & -36/5 & 13/5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -18 & 11 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 12 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & 24 & -15 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Réduction à la forme échelonnée réduite

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
2	0	1	4/5	3/5	2/5	1/5	0	0	0	2
3	0	0	0	1	0	24/5	0	8/5	6/5	3
4	0	0	0	0	0	1	0	2/5	1/5	4
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7

Réduction de la colonne 6 au-dessus du pivot.

$$B \leftarrow G_{24}^T(-1/5)G_{34}^T(-24/5)B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18/25 & 3/25 & -54/25 & 36/25 & -13/25 & 0 & 0 \\ -8/25 & -3/25 & 24/25 & -16/25 & 8/5 & 0 & 0 \\ -23/5 & -3/5 & 59/5 & -36/5 & 13/5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -18 & 11 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 12 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & 24 & -15 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Réduction à la forme échelonnée réduite

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
0	1	$4/5$	$3/5$	$2/5$	0	0	$-2/25$	$-1/25$	2
0	0	0	1	0	0	0	$-8/25$	$6/25$	3
0	0	0	0	0	1	0	$2/5$	$1/5$	4
0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	7

Réduction de la colonne 4 au-dessus du pivot.

$$B \leftarrow G_{23}^T(-3/5)B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 114/125 & 24/125 & -342/125 & 228/125 & -89/125 & 0 & 0 \\ -8/25 & -3/25 & 24/25 & -16/25 & 8/5 & 0 & 0 \\ -23/5 & -3/5 & 59/5 & -36/5 & 13/5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -18 & 11 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 12 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & 24 & -15 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voilà, la forme échelonnée réduite de la matrice A :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	1	0	5	0	4	0	0	1	0	1
	0	1	$4/5$	0	$2/5$	0	0	$-14/125$	$-23/25$	2
	0	0	0	1	0	0	0	$-8/25$	$6/25$	3
	0	0	0	0	0	1	0	$2/5$	$1/5$	4
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7