Deuxième partie, question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

Soit $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x-1)p'(x).$$

1. Montrer que Ψ est linéaire.
2. Calculer la matrice $[\Psi]_{E,E}$ de Ψ par rapport à la base canonique $E = (1, x, x^2, x^3)$.
3. Calculer le rang de Ψ.

1. i) Let $p, g \in \mathbb{R}_3[x]$. Then we first show: $\Psi(p+g) = \Psi(p) + \Psi(g)$.

$\Psi(p+g)(x) = (x-1)[p+g]'(x) = (x-1)[p'(x) + g'(x)]$

$= (x-1)p'(x) + (x-1)g'(x)$

$= \Psi(p)(x) + \Psi(g)(x)$. w

ii) Let $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_3[x]$. We want to show: $\Psi(\alpha p) = \alpha \Psi(p)$.

$\Psi(\alpha p)(x) = (x-1)[\alpha p]'(x) = (x-1)\alpha p'(x)$

$= \alpha (x-1) p'(x) = \alpha \Psi(p)(x)$. w

2. We compute first Ψ on the basis E.

$$\Psi(1)(x) = (x-1)\cdot 0 = 0$$
$$\Psi(x)(x) = (x-1)\cdot 1 = x-1$$
$$\Psi(x^2)(x) = (x-1)\cdot 2x = 2x^2-2x$$
$$\Psi(x^3)(x) = (x-1)\,3x^2 = 3x^3-3x^2$$

Then $[\Psi]_{E,E}$ is given by:

$$[\Psi]_{E,E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. The reduced row echelon form of $[\Psi]_{E,E}$ is

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Thus $\operatorname{rank}\Psi = \operatorname{rank}[\Psi]_{E,E} = 3$.

Question 8: *Cette question est notée sur 6 points.*

Réservé au correcteur

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, et X, Y deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Montrer qu'il existe une application linéaire $T : V \to V$ telle que $T(X) = Y$.

Let $n = \dim V$. Let $\mathcal{X} = \{x_1, .., x_m\} \subseteq V$ basis of X, with $m = \dim X$, and $\mathcal{Y} = \{y_1, .., y_k\} \subseteq V$ basis of Y, with $k = \dim Y$. Then $k \leq m \leq n$.

We can complete basis $\mathcal{X}$ with $\{x_{m+1}, .., x_n\} := \tilde{\mathcal{X}}$ such that $\mathcal{X} \cup \tilde{\mathcal{X}}$ forms a basis of V.

Define $T: V \to V$ in the following way on basis $\mathcal{X} \cup \tilde{\mathcal{X}}$:

$$T(x_j) = \begin{cases} y_j, & \text{if } j \leq k \\ 0, & \text{if } j > k, \end{cases}$$

and extend it by linearity on the whole space V. Then T defined in this way is clearly linear.

It remain's to show $T(X) = Y$.

Let $y \in Y$, then $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(x_i) = T(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i}_{\in X})$$

$\Rightarrow y \in T(X) \Rightarrow Y \subseteq T(X)$.

On the other hand, by definition we have that

$T(v) \in Y, \ \forall v \in V$. Moreover, this means that

$T(x) \in Y, \ \forall x \in X \Rightarrow T(X) \subseteq Y$.

Thus, $T(X) = Y$.

Question 9: *Cette question est notée sur 6 points.*

Réservé au correcteur

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurance.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

1. $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix}$

We show by induction that $A_n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$

BASE CASE: $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = A$

HYPOTHESIS: Suppose that the claim holds for $1 \leq k \leq n$. INDUCTION STEP: Then,

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\text{(by hypothesis)} = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{bmatrix}.$$

W

2. Using the polar representation of complex numbers, we get

$$\alpha = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\theta}, \quad \text{with} \quad \theta = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4$$

$$\Rightarrow \alpha^{99} = (\sqrt{2})^{99} e^{i\frac{99}{4}\pi} = (\sqrt{2})^{99} e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$\Rightarrow \alpha^{100} = (\sqrt{2})^{100} e^{i25\pi} = (\sqrt{2})^{100} e^{i\pi} = -(\sqrt{2})^{100}$$

3. Using 1) & 2), we get

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} (1+i)^{100} & 100\,(1+i)^{99} \\ 0 & (1+i)^{100} \end{bmatrix}$$

$$= (\sqrt{2})^{100} \begin{bmatrix} -1 & \frac{100}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3}{4}\pi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2^{50} \begin{bmatrix} -1 & -50+i50 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$