

**Deuxième partie, question de type ouvert**

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 7:** Cette question est notée sur 5 points.

Réservé au correcteur

Soit  $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x-1)p'(x).$$

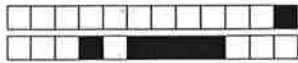
1. Montrer que  $\Psi$  est linéaire.
2. Calculer la matrice  $[\Psi]_{E,E}$  de  $\Psi$  par rapport à la base canonique  $E = (1, x, x^2, x^3)$ .
3. Calculer le rang de  $\Psi$ .

1. i) Let  $p, q \in \mathbb{R}_3[x]$ . Then we first show:  $\Psi(p+q) = \Psi(p) + \Psi(q)$ .

$$\begin{aligned}\Psi(p+q)(x) &= (x-1)[p+q]'(x) = (x-1)[p'(x) + q'(x)] \\ &= (x-1)p'(x) + (x-1)q'(x) \\ &= \Psi(p)(x) + \Psi(q)(x). \quad \checkmark\end{aligned}$$

ii) Let  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}_3[x]$ . We want to show:  $\Psi(\alpha p) = \alpha \Psi(p)$ .

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha p)(x) &= (x-1)[\alpha p]'(x) = (x-1)\alpha p'(x) \\ &= \alpha(x-1)p'(x) = \alpha \Psi(p)(x). \quad \checkmark\end{aligned}$$



2. We compute first  $\Psi$  on the basis  $E$ .

$$\Psi(1)(x) = (x-1) \cdot 0 = 0$$

$$\Psi(x)(x) = (x-1) \cdot 1 = x-1$$

$$\Psi(x^2)(x) = (x-1) \cdot 2x = 2x^2 - 2x$$

$$\Psi(x^3)(x) = (x-1) \cdot 3x^2 = 3x^3 - 3x^2$$

Then  $[\Psi]_{E,E}$  is given by:

$$[\Psi]_{E,E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. The reduced row echelon form of  $[\Psi]_{E,E}$  is

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Thus  $\text{rank } \Psi = \text{rank } [\Psi]_{E,E} = 3$ .



Question 8: Cette question est notée sur 6 points.



Réservé au correcteur

Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $X, Y$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $\dim(X) \geq \dim(Y)$ . Montrer qu'il existe une application linéaire  $T : V \rightarrow V$  telle que  $T(X) = Y$ .

Let  $n = \dim V$ . Let  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq V$  basis of  $X$ , with  $m = \dim X$ , and  $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq V$  basis of  $Y$ , with  $k = \dim Y$ . Then  $k \leq m \leq n$ .

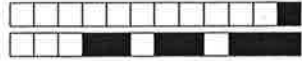
We can complete basis  $\mathcal{X}$  with  $\{x_{m+1}, \dots, x_n\} =: \tilde{\mathcal{X}}$  such that  $\mathcal{X} \cup \tilde{\mathcal{X}}$  forms a basis of  $V$ .

Define  $T: V \rightarrow V$  in the following way, on basis  $\mathcal{X} \cup \tilde{\mathcal{X}}$ :

$$T(x_j) = \begin{cases} y_j, & \text{if } j \leq k \\ 0, & \text{if } j > k, \end{cases}$$

and extend it by linearity on the whole space  $V$ . Then  $T$  defined in this way is clearly linear.

It remain's to show  $T(X) = Y$ .



$$\begin{aligned} \text{Let } y \in Y, \text{ then } y &= \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i T(x_i) = T\left(\underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i}_{\in X}\right) \end{aligned}$$

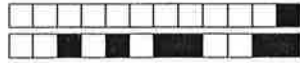
$$\Rightarrow y \in T(X) \Rightarrow Y \subseteq T(X).$$

On the other hand, by definition we have that

$T(v) \in Y, \forall v \in V$ . Moreover, this means that

$$T(x) \in Y, \forall x \in X \Rightarrow T(X) \subseteq Y.$$

$$\text{Thus, } T(X) = Y.$$



Question 9: Cette question est notée sur 6 points.



Réservé au correcteur

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice  $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$ , où  $n \geq 1$  est un entier. Montrer la formule par récurrence.
2. On pose  $\alpha = 1 + i$ . Calculer  $\alpha^{99}$  et  $\alpha^{100}$ .
3. Calculer  $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}^{100}$ .

$$1. A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix}$$

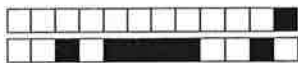
We show by induction that  $A_n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$

BASE CASE:  $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = A$

HYPOTHESIS: Suppose that the claim holds for  $1 \leq k \leq n$ . INDUCTION STEP: Then,

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\text{(by hypothesis)} \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$



2. Using the polar representation of complex numbers, we get

$$\alpha = 1+i = \sqrt{2} e^{i\theta}, \text{ with } \theta = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \alpha^{99} = (\sqrt{2})^{99} e^{i \frac{99\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{99} e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \alpha^{100} = (\sqrt{2})^{100} e^{i25\pi} = (\sqrt{2})^{100} e^{i\pi} = -(\sqrt{2})^{100}$$

3. Using 1) & 2), we get

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} (1+i)^{100} & 100(1+i)^{99} \\ 0 & (1+i)^{100} \end{bmatrix}$$

$$= (\sqrt{2})^{100} \begin{bmatrix} -1 & \frac{100}{\sqrt{2}} e^{i \frac{3\pi}{4}} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2^{50} \begin{bmatrix} -1 & -50+i50 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$