Chapitre 6
Déterminants

Les déterminants ont joué un rôle fondamental dans le développement historique de l'algèbre linéaire. Avant le développement moderne de la notation des matrices on a exprimé toutes les assertions et leurs preuves en termes de déterminants (sans matrices). Heureusement, ceci a changé ! Malgré cela, les déterminants gardent un rôle dans la compréhension théorique.

6.1 Définitions

$(K,+,\cdot)$ désigne un anneau commutatif dans ce chapitre. On rappelle que S_n est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$.

Définition 6.1 *(i) Soit $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. Un couple $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $1 \leq i < j \leq n$, s'appelle une* ***inversion*** *de σ si $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

(ii) Soit k le nombre d'inversion d'une permutation σ. On appelle ***signature*** *[sign] de la permutation le nombre $\mathsf{sgn}(\sigma) := (-1)^k$. Pour $n = 1$, il existe seulement une permutation $\sigma = \mathsf{id}$ et on définit $\mathsf{sgn}(\mathsf{id}) = 1$.*

Exemple 6.2 La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a les inversions $(2,3)$, $(2,4)$, alors $\mathsf{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$. ♦

Définition 6.3 *Soit K un anneau commutatif et soit $A \in M_{n\times n}(K)$. Le* ***déterminant*** *de A est défini par*

$$\det(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{6.1}$$

Dit autrement, étant donnée une permutation σ on choisit le $\sigma(i)$-ième élément de la i-iéme ligne de A pour $i = 1,\dots,n$. On multiplie par la signature de σ le produit de ces n élements. Enfin, on fait la somme de tous ces produits sur toutes les permutations. On remarque qu'il existe $n!$ permutations, alors le calcul du déterminant devient extrêmement laborieux pour une matrice de grande taille. Dans la section 6.5.1 on developpera un algorithme plus efficace.

Remarque 6.4 *Le déterminant d'une matrice A est un exemple d'une fonction linéaire par rapport à chaque colonne de A. Une telle fonction s'appelle* ***multilinéaire****. Un autre* *exemple moins important d'une fonction multilinéaire est le* ***permanent*** *défini par*

$$\operatorname{perm}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

La différence semble faible, on a seulement supprimé la signature, mais elle est en fait énorme ! Par exemple, il n'existe pas un algorithme efficace pour le calcul du permanent d'une matrice de grande taille. Le calcul du permanent est un problème NP-difficile.[7]

Déterminants des matrices particuliers.

Matrices 1×1**.** Par définition, le déterminant d'une matrice $A = (a_{11}) \in M_{1\times 1}(K)$ est donné par $\det(A) = a_{11}$.

Matrices 2×2**.** Pour $n = 2$ il y a deux permutations :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1.$$

Alors le déterminant d'une matrice A de taille 2×2 est donné par

$$\boxed{\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

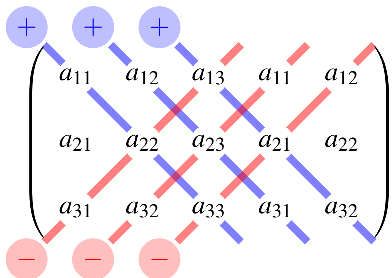
Matrices 3×3**.** Pour $n = 3$ il y a six permutations :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

avec $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_3) = 1$ et $\operatorname{sgn}(\sigma_4) = \operatorname{sgn}(\sigma_5) = \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$. Alors le déterminant d'une matrice A de taille 3×3 est donné par

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}}$$

On peut bien visualiser cette formule par la **règle de Sarrus** :



7. En fait, il existe des algorithmes passablement efficaces pour l'approximation du permanent d'une matrice à coefficients positifs, voir, par exemple [M. Jerrum, A. Sinclair, E. Vigoda. A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries. J. ACM 51 (2004), 4, 671–697].

Matrices diagonales. Soit $D = \mathsf{diag}\,(d_{11},d_{22},\ldots,d_{nn}) \in M_{n\times n}(K)$. Alors il existe seulement une permutation σ telle que $d_{1,\sigma(1)}d_{2,\sigma(2)}\cdots d_{n,\sigma(n)} \neq 0$, i.e. $\sigma = \mathsf{id}$. Donc

$$\det\big(\mathsf{diag}\,(d_{11},d_{22},\ldots,d_{nn})\big) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}.$$

Matrices triangulaires. **Lemme 6.5** *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Alors*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

DÉMONSTRATION. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Considérons $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ alors $\sigma(1) = 1$ est nécessaire pour que le produit soit non nul. Par suite $\sigma(2) \in \{1,2\}$ pour que $a_{2,\sigma(2)} \neq 0$. Mais $\sigma(2) = 1$ n'est pas possible car une permutation σ doit être bijective. Alors $\sigma(2) = 2$. En répétent cet argument on obtient que $\sigma = \mathsf{id}$. Donc $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Le raisonnement est similaire pour une matrice triangulaire supérieure. ■

Matrices de permutation. Soit $\pi \in S_n$, considérons

$$P_\pi = \begin{pmatrix} e_{\pi(1)}^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ e_{\pi(n)}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \big(p_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma \neq \pi$ car toutes les éléments de la ligne i sauf l'élément $\pi(i)$ sont nuls. Alors on a

$$\det(P_\pi) = \mathsf{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n}\underbrace{p_{i,\pi(i)}}_{=1} = \mathsf{sgn}(\pi). \tag{6.2}$$

6.2 Propriétés de la signature

Le lemme suivant donne une expression explicite de la signature d'une permutation.

Lemme 6.6 *Soit $\sigma \in S_n$. Alors*

$$\mathsf{sgn}(\sigma) = \prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}.$$

DÉMONSTRATION. Pour $n = 1$ la formule est vraie par la définition. Soit $n \geq 2$. Alors on a

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}|\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i). \tag{6.3}$$

On montre cette relation en calculant

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}|\sigma(j)-\sigma(i)| &= \Bigg(\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}(\sigma(j)-\sigma(i))\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(j)<\sigma(i)}}(\sigma(i)-\sigma(j))\Bigg)\\ &= \Bigg(\prod_{\substack{\sigma^{-1}(\tilde{i})<\sigma^{-1}(\tilde{j})\\ \tilde{i}<\tilde{j}}}(\tilde{j}-\tilde{i})\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{\sigma^{-1}(\tilde{j})<\sigma^{-1}(\tilde{i})\\ \tilde{i}<\tilde{j}}}(\tilde{j}-\tilde{i})\Bigg) = \prod_{\tilde{i}<\tilde{j}}(\tilde{j}-\tilde{i}),\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait qu'on a soit $\sigma^{-1}(\tilde{i}) < \sigma^{-1}(\tilde{j})$, soit $\sigma^{-1}(\tilde{j}) < \sigma^{-1}(\tilde{i})$ si $\tilde{i} \neq \tilde{j}$. Soit k le nombre d'inversions de σ, alors

$$\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{|\sigma(j)-\sigma(i)|} = (-1)^k = \mathsf{sgn}(\sigma).$$

Mis en ensemble avec (6.3), cela donne l'assertion. ■

Théorème 6.7 *Soient* $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. *Alors* $\mathsf{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathsf{sgn}(\sigma_1)\mathsf{sgn}(\sigma_2)$.

DÉMONSTRATION. Par le lemme 6.6 on obtient

$$\begin{aligned}
\mathsf{sgn}(\sigma_1\circ\sigma_2) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{i-j} \\
&= \Big(\prod_{i<j} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}\Big)\Big(\prod_{i<j} \frac{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}{i-j}\Big) \\
&\overset{\substack{\tilde{i}=\sigma_2(i)\\ \tilde{j}=\sigma_2(j)}}{=} \mathsf{sgn}(\sigma_2) \prod_{\sigma_2^{-1}(\tilde{i})<\sigma_2^{-1}(\tilde{j})} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}} \\
&= \mathsf{sgn}(\sigma_2)\Big(\prod_{\substack{\tilde{i}<\tilde{j}\\ \sigma_2^{-1}(\tilde{i})<\sigma_2^{-1}(\tilde{j})}} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}}\Big)\Big(\prod_{\substack{\tilde{i}>\tilde{j}\\ \sigma_2^{-1}(\tilde{i})<\sigma_2^{-1}(\tilde{j})}} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}}\Big).
\end{aligned}$$

En permutant les rôles de $\tilde{i}$ et $\tilde{j}$ dans le deuxième facteur, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathsf{sgn}(\sigma_1\circ\sigma_2) &= \mathsf{sgn}(\sigma_2)\Big(\prod_{\substack{\tilde{i}<\tilde{j}\\ \sigma_2^{-1}(\tilde{i})<\sigma_2^{-1}(\tilde{j})}} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}}\Big)\Big(\prod_{\substack{\tilde{j}>\tilde{i}\\ \sigma_2^{-1}(\tilde{j})<\sigma_2^{-1}(\tilde{i})}} \frac{\sigma_1(\tilde{j})-\sigma_1(\tilde{i})}{\tilde{j}-\tilde{i}}\Big) \\
&= \mathsf{sgn}(\sigma_2)\Big(\prod_{\substack{\tilde{i}<\tilde{j}\\ \sigma_2^{-1}(\tilde{i})<\sigma_2^{-1}(\tilde{j})}} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}}\Big)\Big(\prod_{\substack{\tilde{i}<\tilde{j}\\ \sigma_2^{-1}(\tilde{j})<\sigma_2^{-1}(\tilde{i})}} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}}\Big) \\
&= \mathsf{sgn}(\sigma_2)\prod_{\tilde{i}<\tilde{j}} \frac{\sigma_1(\tilde{i})-\sigma_1(\tilde{j})}{\tilde{i}-\tilde{j}} = \mathsf{sgn}(\sigma_1)\mathsf{sgn}(\sigma_2).
\end{aligned}$$

■

En posant $\sigma_1 = \sigma$ et $\sigma_2 = \sigma^{-1}$ pour $\sigma \in S_n$, le théorème 6.7 donne

$$\mathsf{sgn}\big(\sigma^{-1}\big) = \mathsf{sgn}(\sigma).$$

En d'autres termes, le théorème 6.7 dit que sgn : $S_n \to \{+1,-1\}$ est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $(\{+1,-1\}, \cdot)$.

On rappelle le cas particulier d'une transposition (voir la définition 3.5) :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad 1 \le i < j \le n. \tag{6.4}$$

En comptant simplement on voit que τ a $2(j-i)-1$ inversions, alors $\mathsf{sgn}(\tau) = -1$. Toute permutation peut s'écrire comme une composition de transpositions, par exemple

$$\begin{aligned}
\sigma = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On remarque que le nombre de transpositions n'est pas unique. En revanche, par le théorème 6.7, la parité de ce nombre est unique.

Corollaire 6.8 *Soit $\sigma \in S_n$. Alors*

(i) $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ *si et seulement si σ peut s'écrire comme la composition d'un nombre pair de transpositions,*

(ii) $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ *si et seulement si σ peut s'écrire comme la composition d'un nombre impair de transpositions.*

6.3 Propriétés du déterminant

Lemme 6.9 *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$. Alors* $\det\big(A^\mathsf{T}\big) = \det(A)$.

DÉMONSTRATION. Par la définition du déterminant on obtient

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \overset{\mu=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\mu^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu^{-1})\prod_{i=1}^n a_{i,\mu^{-1}(i)} \\
&\overset{j=\mu^{-1}(i)}{=} \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu)\prod_{j=1}^n a_{\mu(j),j} = \det(A^\mathsf{T}).
\end{aligned}$$

■

Lemme 6.10 *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$.*

1. *Si au moins une des lignes de A est nulle alors* $\det(A) = 0$.
2. *Si $n \geq 2$ et deux lignes de A sont identiques, alors* $\det(A) = 0$.

DÉMONSTRATION. (i). Exercice.

(ii). Supposons que les lignes i et j, où $i < j$, de A sont identiques. On considére la réunion disjointe

$$S_n = T_n \cup S_n\backslash T_n,$$

où

$$T_n := \big\{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(i) < \sigma(j)\big\}, \quad S_n\backslash T_n = \big\{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(i) > \sigma(j)\big\}.$$

En utilisant la transposition τ de (6.4) on peut écrire

$$S_n\backslash T_n = \big\{\sigma\circ\tau \,|\, \sigma \in T_n\big\}.$$

En utilisant le théorème 6.7, $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$, et $\tau = \tau^{-1}$, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde\sigma\in S_n\backslash T_n} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)\prod_{k=1}^n a_{k,\tilde\sigma(k)} &= \sum_{\sigma\in T_n} \operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(\tau(k))} \\
&\overset{\ell=\tau(k)}{=} -\sum_{\sigma\in T_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{\ell=1}^n a_{\tau(\ell),\sigma(\ell)} \\
&= -\sum_{\sigma\in T_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{\ell=1}^n a_{\ell,\sigma(\ell)}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle de l'égalité des lignes i et j. Alors on a

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} = \sum_{\sigma\in T_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} + \sum_{\sigma\in S_n\setminus T_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} \\ &= \sum_{\sigma\in T_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} - \sum_{\sigma\in T_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} = 0.\end{aligned}$$

■

En combinant le lemme 6.9 et le lemme 6.10 on obtient qu'une matrice avec une colonne nulle a un déterminant nul.

Le lemme suivant décrit l'effet de la multiplication par une des matrices élémentaires (voir la section 3.1) sur le déterminant.

Lemme 6.11 *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$ et $n \geq 2$. Alors*

(i) $\det(M_i(\lambda)A) = \lambda\cdot\det(A) = \det(M_i(\lambda))\cdot\det(A)$ *pour* $\lambda \in K$, $1 \leq i \leq n$,

(ii) $\det(G_{ij}(\lambda)A) = \det(A) = \det(G_{ij}(\lambda))\cdot\det(A)$ *et* $\det(G_{ij}^{\mathsf{T}}(\lambda)A) = \det(A) = \det(G_{ij}^{\mathsf{T}}(\lambda))\cdot\det(A)$ *pour* $\lambda \in K, 1 \leq i < j \leq n$;

(iii) $\det(P_{ij}A) = -\det(A) = \det(P_{ij})\cdot\det(A)$ *pour* $1 \leq i < j \leq n$.

DÉMONSTRATION. (i).

$$\begin{aligned}\det(M_i(\lambda)A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\lambda a_{i,\sigma(i)}\prod_{k\neq i} a_{k,\sigma(k)}\right) \\ &= \lambda\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \lambda\cdot\det(A).\end{aligned}$$

Comme $M_i(\lambda)$ est une matrice diagonale, on obtient $\det(M_i(\lambda)) = \lambda$ et donc $\lambda\cdot\det(A) = \det(M_i(\lambda))\cdot\det(A)$.

(ii).

$$\begin{aligned}\det(G_{ij}(\lambda)A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\left(a_{j,\sigma(j)} + \lambda a_{i,\sigma(j)}\right)\prod_{k\neq j} a_{k,\sigma(k)}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} + \lambda\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(a_{i,\sigma(j)}\prod_{k\neq j} a_{k,\sigma(k)}\right).\end{aligned}$$

On remarque que le second terme correspond au déterminant de la matrice A avec la ligne j remplacée par la ligne i. Par le lemme 6.10, ce déterminant est nul est, ainsi, $\det(G_{ij}(\lambda)A) = \det(A)$. Comme $G_{ij}(\lambda)$ est une matrice triangulaire inférieure et tous ses éléments diagonaux sont 1, on obtient $\det(G_{ij}(\lambda)) = 1$ et donc $\det(A) = \det(G_{ij}(\lambda))\cdot\det(A)$. Le raisonnement est similaire pour $G_{ij}^{\mathsf{T}}(\lambda)$.

(iii). L'équation $\det(P_{ij}A) = -\det(A)$ est montrée comme dans la preuve du lemme 6.10. L'équation $\det(P_{ij})\cdot\det(A) = -\det(A)$ découle du $\det(P_{ij}) = \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ■

Le lemme 6.11 nous dit que le déterminant d'un produit d'une matrice élémentaire et une matrice quelconque est égale au produit des déterminants de ces deux matrices. En fait, cette propriété est vraie en général.

Théorème 6.12 *Soit $(K,+,\cdot)$ un anneau commutatif et soient $A,B \in M_{n\times n}(K)$. Alors*

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration ici utilise la forme échelonnée (réduite). Dans ce but, on suppose que K soit un corps. Mais le résultat du théorème reste vrai si K est un anneau commutatif.[8]

On sait d'après le théorème 3.13 qu'il existe des matrices élémentaires E_i, $i = 1, \ldots, m$, telles que $\tilde{A} := E_m E_{m-1} \cdots E_1 A$ est sous forme échelonnée réduite. Comme l'inverse d'une matrice élémentaire est encore une matrice élémentaire, le lemme 6.11 donne

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(E_m^{-1} \cdots E_1^{-1} \tilde{A}\right) = \det(E_m^{-1}) \cdot \det\left(E_{m-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} \tilde{A}\right) \\ &= \cdots = \det(E_m^{-1}) \cdots \det(E_1^{-1}) \det(\tilde{A}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

ainsi que

$$\det(AB) = \det(E_m^{-1}) \cdots \det(E_1^{-1}) \det(\tilde{A}B). \tag{6.6}$$

Si A n'est pas inversible, les dernières lignes de $\tilde{A}$ et $\tilde{A}B$ sont nulles, alors $\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}B) = 0$. Par (6.5)–(6.6), on obtient $\det(AB) = 0 = \det(A) = \det(A) \cdot \det(B)$. Si A est inversible, $\tilde{A} = I$ (voir le théorème 3.13) et donc l'assertion découle directement de (6.5)–(6.6). ■

Corollaire 6.13 *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$, $P \in M_{n\times n}(K)$, dont P soit inversible. Alors*

(i) $\det(P)$ *est inversible et* $\det(P^{-1}) = (\det(P))^{-1}$,

(ii) $\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A)$.

DÉMONSTRATION. (i). Par le théorème 6.12, $1 = \det(I) = \det\left(PP^{-1}\right) = \det(P) \cdot \det\left(P^{-1}\right)$ et $1 = \det(I) = \det\left(P^{-1}P\right) = \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det(P)$. Alors $\det(P) \in K$ est inversible et son inverse est donné par $\det\left(P^{-1}\right)$.

(ii).

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \frac{\det(P)}{\det(P)} \det(A) = \det(A).$$

■

Remarque 6.14 *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $F : V \to V$ une application linéaire (i.e., un endomorphisme). On choisit n'importe quelle base $\mathscr{B}_V$ et on définit*

$$\det(F) := \det\left([F]_{\mathscr{V},\mathscr{V}}\right). \tag{6.7}$$

Cette définition est indépendante du choix de la base. En effet soit $\hat{\mathscr{B}}_V$ une autre base. Par la relation (5.13) *et le corollaire 6.13, on a*

$$\det\left([F]_{\hat{\mathscr{B}}_V,\hat{\mathscr{B}}_V}\right) = \det\left([I]_{\mathscr{B}_V,\hat{\mathscr{B}}_V}\right) \cdot \det\left([F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_V}\right) \cdot \det\left([I]^{-1}_{\mathscr{B}_V,\hat{\mathscr{B}}_V}\right) = \det\left([F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_V}\right).$$

Corollaire 6.15 *Soient $A_{11} \in K^{n_1\times n_1}$, $A_{12} \in K^{n_1\times n_2}$, $A_{22} \in K^{n_2\times n_2}$. Alors*

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}).$$

DÉMONSTRATION. Exercice. ■

8. Voir, par exemple, la section 5.13 dans le livre Nicholas Loehr, *Advanced Linear Algebra*, CRC press, 2014.

6.4 Comatrice et formules de Laplace

Soit K un anneau commutatif et soit $A \in M_{n\times n}(K)$, $n \geq 2$. On note $A(k,\ell) \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ la matrice obtenue de A en supprimant la ligne k et la colonne ℓ de A. Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

on obtient

$$A(2,3) = \begin{pmatrix} 16 & 2 & \cancel{3} & 13 \\ \cancel{5} & \cancel{11} & \cancel{10} & \cancel{8} \\ 9 & 7 & \cancel{6} & 12 \\ 4 & 14 & \cancel{15} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 9 & 7 & 12 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 6.16 *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$ et $n \geq 2$. La* ***comatrice*** *[cofactor matrix] de A, notée $\mathsf{com}(A)$, est la matrice $B = \mathsf{com}(A) \in M_{n\times n}(K)$ dont les éléments sont donnés par*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\det\big(A(i,j)\big), \qquad i,j = 1,\dots,n. \tag{6.9}$$

Si $n = 1$ on pose $\mathsf{com}(A) = 1$. Les coefficients b_{ij} de $\mathsf{com}(A)$ sont appelés ***cofacteurs*** *de A.*

Les facteurs $(-1)^{i+j}$ dans (6.9) se peuvent lire dans la « matrice échiquier »

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

La comatrice de la matrice A de (6.8) est donnée par

$$\mathsf{com}(A) = \begin{pmatrix} -136 & -408 & 408 & 136 \\ -408 & -1224 & 1224 & 408 \\ 408 & 1224 & -1224 & -408 \\ 136 & 408 & -408 & -136 \end{pmatrix}.$$

On observe que $\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} A = A\,\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} = 0$ pour cette matrice (non inversible). En général, on a le résultat suivant.

Théorème 6.17 *Soit K un anneau commutatif et soit $A \in M_{n\times n}(K)$. Alors*

$$\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} A = A\,\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} = \det(A)\cdot I_n.$$

DÉMONSTRATION. On a évidemment le résultat pour $n = 1$. Alors, soit $n \geq 2$.

Soit $A = \big(a_1, a_2, \dots, a_n\big)$, où $a_1, \dots, a_n \in K^{n\times 1}$. Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ on considère la matrice

$$B(i,j,\alpha) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_1 & \dots & a_{j-1} & \alpha e_i & a_{j+1} & \cdots & a_n \end{array}\right), \qquad \alpha \in K.$$

En posant

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ i & 1 & \cdots & i-2 & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ j & 1 & \cdots & j-2 & j-1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

on obtient

$$P_\pi B(i,j,\alpha)P_\mu^T = \begin{pmatrix} \alpha & \star \\ 0 & A(i,j) \end{pmatrix}, \quad \det(P_\pi) = (-1)^{i-1}, \quad \det(P_\mu) = (-1)^{j-1}.$$

Par le lemme 6.9 et le corollaire 6.15, on a

$$\det\big(B(i,j,\alpha)\big) = \alpha \det\big(A(i,j)\big)\det(P_\pi)\det(P_\mu) = \alpha(-1)^{i+j}\det\big(A(i,j)\big).$$

D'après la définition de comatrice on a pour la matrice $C = \mathsf{com}(A)^\mathsf{T} A$ que

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det\big(A(i,j)\big)a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\det\big(B(i,j,a_{ik})\big). \tag{6.10}$$

D'après la multlinéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on a

$$c_{jk} = \det\big(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_1 & \dots & a_{j-1} & a_k & a_{j+1} & \cdots & a_n \end{array}\big).$$

Pour $j \neq k$ la matrice à droite a deux colonnes identiques et donc $c_{jk} = 0$. Pour $j = k$ la matrice à droite est égale à A et donc $c_{jj} = \det(A)$. Alors $\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} A = \det(A)\cdot I_n$.

Pour la relation $A\,\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} = \det(A)\cdot I_n$ on utilise

$$A\,\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} = \big(\mathsf{com}(A)A^\mathsf{T}\big)^\mathsf{T} = \big(\mathsf{com}(A^\mathsf{T})^\mathsf{T}A^\mathsf{T}\big)^\mathsf{T} = \big(\det(A^\mathsf{T})\cdot I_n\big)^\mathsf{T} = \det(A)\cdot I_n,$$

où l'on a utilisé que $\mathsf{com}(A)^\mathsf{T} = \mathsf{com}(A^\mathsf{T})$, ce qui se vérfie facilement. ■

Comme corollaire du théorème 6.17 on obtient la preuve du lemme 1.35.

Corollaire 6.18 *Soit K un anneau commutatif et $A \in M_{n\times n}(K)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) *A est inversible.*
ii) *$\det(A)$ est inversible.*
iii) *Il existe une matrice $X \in M_{n\times n}(K)$ telle que $AX = I_n$.*
iv) *Il existe une matrice $X \in M_{n\times n}(K)$ telle que $XA = I_n$.*

DÉMONSTRATION. i) ⇒ ii) Voir le corollaire 6.13.

ii) ⇒ i) Par le théorème 6.17, la matrice $(\det(A))^{-1}\mathsf{com}(A)^\mathsf{T}$ est l'inverse de A.

iii) ⇒ ii) On suppose que $AX = I_n$. D'après le théorème 6.12, $\det(A)\det(X) = \det(AX) = 1$. Alors, $\det(A)$ est inversible. On montre de façon analogue iv) ⇒ ii).

Les implications i) ⇒ iii) et i) ⇒ iv) sont triviales. ■

Une autre conséquence du théorème 6.17 est la formule de Laplace, qui permet de bien calculer le déterminant, surtout si des nombreux coefficients sont nuls.

Corollaire 6.19 (Formules de Laplace) *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$ et $n \geq 2$. Alors, on a*

(i) le développement de A par rapport à la i-ième ligne pour $1 \leq i \leq n$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\big(A(i,j)\big),$$

(ii) le développement de A par rapport à la j-ième colonne pour $1 \leq j \leq n$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\big(A(i,j)\big).$$

DÉMONSTRATION. (i). Le i-ième élément diagonal de la relation $\det(A)\cdot I_n = A\,\mathsf{com}(A)^\mathsf{T}$ donne

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(\mathsf{com}(A)\big)_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\big(A(i,j)\big).$$

(ii). Le j-ième élément diagonal de la relation $\det(A)\cdot I_n = \mathsf{com}(A)^\mathsf{T} A$ donne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}\big(\mathsf{com}(A)\big)_{ij}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\big(A(i,j)\big).$$

■

Exemple 6.20 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Le développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^2\det A(1,1) + (-1)^3 2\cdot\det A(1,2) + (-1)^4 3\cdot\det A(1,3)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\\
&= 2 - 2\cdot(-6) + 3\cdot(-3) = 5.
\end{aligned}$$

Le développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^2\det A(1,1) + (-1)^3\cdot 0\cdot\det A(2,1) + (-1)^4 3\cdot\det A(3,1)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 3 = 5.
\end{aligned}$$

Le développement par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^3\cdot 0\cdot\det A(2,1) + (-1)^4\cdot 1\cdot\det A(2,2) + (-1)^5\cdot 2\cdot\det A(2,3)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5 + 10 = 5.
\end{aligned}$$

♦

Théorème 6.21 (Règle de Cramer) *Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{n\times n}(K)$ une matrice inversible. Considerérons le système linéaire $Ax = b$ pour $b \in K^n$. Alors le solution du sysème est donnée par $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ avec*

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{i-1} & | & b & | & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}}{\det(A)}, \quad 1 \le i \le n. \tag{6.11}$$

DÉMONSTRATION. Exercice. ■

La règle de Cramer n'est pas utilisée numériquement, parce qu'elle est trop coûteuse et amène des erreurs d'arrondi catastrophiques.

6.5 Aspects pratiques

6.5.1 Calculer des déterminants

La commande MATLAB `det` calcule le déterminant d'une matrice $A \in M_{n\times n}(K)$, pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, à l'aide de la décomposition LU

$$PA = LU,$$

où P est une matrice de permutation, L est une matrice triangulaire inférieure, dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1, et U est une matrice triangulaire supérieure. Le calcul de cette décomposition est proche du calcul de la forme échélonnée (vous en parlerez en détail en analyse numérique). En fait, la matrice de permutation P est composée des transpositions utilisées dans la réduction à la forme échélonnée. Alors on a que

$$\det(A) = \pm u_{11}u_{22}\cdots u_{nn},$$

où on choisit le signe $+$ si le nombre de transpositions est pair et -1 sinon.

6.5.2 Le déterminant et l'inversibilité

Le corollaire 6.18 *pourrait* suggérer que le valeur absolue du déterminant soit une bonne mesure de la « bonne » inversibilité d'une matrice réelle. Par exemple, on pourrait conclure d'un petit déterminant que la matrice est proche d'être singulière. On met en garde contre telles conjectures ! En effet, la documentation de la commande MATLAB `det` dit :

```
DET    Determinant.
   DET(X) is the determinant of the square matrix X.

   Use COND instead of DET to test for matrix singularity.
```

(Le commande `COND` calcule le nombre de conditionnement d'une matrice, que l'on va voir en analyse numérique.)

Par exemple, on considère la matrice $T_n = \frac{1}{2}I_n$. Cette matrice est bien inversible, $T^{-1} = 2I_n$. Mais le déterminant devient très petit pour des grandes valeurs de n : $\det(T_{100}) = 2^{-100} \approx 8 \cdot 10^{-31}$. D'un autre coté on considère

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K).$$

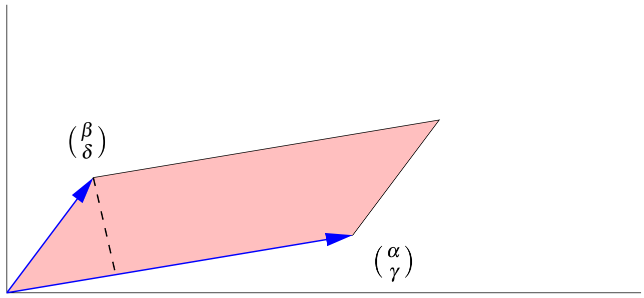
Malgré le fait que le déterminant se comporte bien ($\det(W_n) = 1$), cette matrice est (numériquement) difficile à inverser. L'élément $(1,n)$ de W_n^{-1} est donné par 2^{n-2}, c'est $\approx 3 \cdot 10^{29}$ pour $n = 100$. En faisant une petite modification de la dernière ligne de W_n, on obtient la matrice *singulière* suivante :

$$\widetilde{W}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{2^{n-1}-1}.$$

Pour $n = 100$, la différence entre les coefficients de la matrice inversible W_n et ceux de la matrice singulière $\tilde{W}_n$ est seulement $\approx 2 \cdot 10^{-30}$.

6.5.3 Interprétation géometrique du déterminant

Il y a une relation intime entre les déterminants et les volumes de parallélépipèdes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, ... On peut facilement voir cette relation pour $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. On considère le parallélogramme déterminé par les colonnes de A :



On note l'aire du parallélogramme (produit de la longueur de la base par la hauteur)

$$\mathrm{Aire}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}\right\}.$$

Dans le cas particulier $\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha} & \tilde{\beta}\\ 0 & \tilde{\delta}\end{pmatrix}$ la base se situe sur l'axe des abscisses et on obtient que

$$\mathrm{Aire}\left\{\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix}\right\}=|\tilde{\alpha}|\,|\tilde{\delta}|=\left|\det\begin{pmatrix}\tilde{\alpha} & \tilde{\beta}\\ 0 & \tilde{\delta}\end{pmatrix}\right|=|\det(\tilde{A})|. \tag{6.12}$$

Pour tout vecteur $\binom{\alpha}{\gamma}$ il existe une rotation $Q=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$ telle que $Q\binom{\alpha}{\gamma}=\binom{\tilde{\alpha}}{0}$, $\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}$. On peut montrer que l'aire du parallélogramme n'est pas modifiée par la rotation :

$$\mathrm{Aire}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Aire}\left\{\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix}\right\},\quad \text{où}\quad \begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix}:=Q\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}.$$

Par (6.12) on obtient

$$\mathrm{Aire}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}\right\}=|\det(\tilde{A})|=|\det(QA)|=|\det(Q)|\,|\det(A)|=|\det(A)|, \tag{6.13}$$

où on a utilisé que $\det(Q)=\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$.

La relation (6.13) se generalise en dimension quelconque :

Soit $A\in M_{d\times d}(\mathbb{R})$.
Alors le volume du parallélépipède engendré par les colonnes de A est égal à $|\det(A)|$.

On peut montrer ce résultat par la décomposition QR (en algèbre linéaire 2).

Il existe une autre interprétation de (6.13) : Un carré de longueur de coté ℓ est engendré par $\binom{\ell}{0}$, $\binom{0}{\ell}$, de plus son aire est égale à ℓ^2. En transformant ce carré par la matrice $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ on obtient le parallélépipède engendré par $\binom{\ell\alpha}{\ell\gamma},\binom{\ell\beta}{\ell\delta}$ avec une aire de $|\det(A)|\ell^2$. Alors la valeur absolue du déterminant, $|\det(A)|$, décrit la modification de l'aire par la multiplication par A. On peut généraliser ce résultat à domaines quelconques $\Omega\subset\mathbb{R}^d$:

$$\widetilde{\Omega}=\{Ax:\ x\in\Omega\}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{Volume}(\widetilde{\Omega})=|\det(A)|\times\mathrm{Volume}(\Omega).$$

Cette formule joue un rôle important dans le contexte de l'intégration.

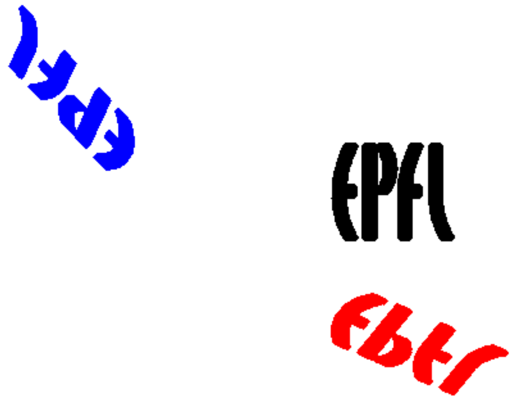


FIG. 6.1 – Le logo EPFL (en noir), transformé par les matrices A_1 (en bleu) et A_2 (en rouge) de (6.14).

Le signe du déterminant $\det(A)$ signifie un change d'orientation. Dans la figure 6.1 on voit les transformations par les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

avec $\det(A_1) = 3/4$ et $\det(A_2) = -9/8$.