Chapitre 5

Applications linéaires

Dans ce chapitre on va considérer des applications entre deux espaces vectoriels V, W, en particulier celles qui sont compatibles avec la structure de l'espace vectoriel.

5.1 Définitions et premières propriétés

Définition 5.1 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels. Une* ***application linéaire*** *[linear map] $F : V \to W$ est une application satisfaisant les deux conditions suivantes :*
(i) $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ pour tous $v_1, v_2 \in V$,
(ii) $F(\alpha v) = \alpha F(v)$ pour tous $\alpha \in K, v \in V$.

Remarques:

– En posant $v_2 = 0$, le point (ii) de la définition 5.1 implique que $F(0) = 0$.

– On a une définition équivalente en demandant que

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) \tag{5.1}$$

pour tous $\alpha \in K$, $v_1, v_2 \in V$. Quelle définition, la 5.1 (i)+(ii) ou la (5.1), doit-on favoriser ? C'est une question de goût.

– Plus généralement, si $f : V \to W$ est une application linéaire, alors

$$F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) \tag{5.2}$$

pour tous $n \geq 1$, tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ et tous $v_1, \ldots, v_n \in V$. La preuve de (5.2) procède par récurrence : le cas $n = 1$ est la définition 5.1 (ii). Supposons que la relation (5.2) est vraie pour $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} & F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1}) \\ =& F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \alpha_{n+1} F(v_{n+1}) && \text{(par définition 5.1)} \\ =& \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) + \alpha_{n+1} F(v_{n+1}). && \text{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Ceci démontre (5.2) pour $n + 1$.

Exemples des applications linéaires

Deux exemples banals : L'application nulle $F : V \to W$, $F : v \mapsto 0$, et l'application identité $F : V \to V$, $F : v \mapsto v$, sont toujours linéaires.

Dans tous les exemples suivants on suppose que $K = \mathbb{R}$.

Fonctions linéaires. Soit $V = W = \mathbb{R}$. Alors, la fonction $g(x) = \beta x$, où $\beta \in \mathbb{R}$, est une application linéaire, car

$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta\alpha_1 x_1 + \beta\alpha_2 x_2 = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2).$$

On observe qu'une fonction $\tilde{g}(x) = \beta x + \gamma$ n'est pas une application linéaire si $\gamma \neq 0$.

Produits matrice-vecteur. Soient $V = K^n$, $W = K^m$ est soit $A \in M_{m\times n}(K)$. Le produit matrice vecteur

$$F_A : K^n \to K^m, \quad F_A(x) = Ax,$$

est une application linéaire. En effect, on a vu dans le chapitre 1 que

$$F_A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y = \alpha F_A(x) + \beta F_A(y).$$

On va voir plus tard que la réciproque est vraie aussi : Si V, W sont de dimension finie, alors on peut regarder toute application linéaire comme un produit matrice-vecteur.

Intégration. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit

$$C([a,b]) = \{g : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, g \text{ est continue sur } [a,b]\}.$$

Alors, les deux applications

$$\ell : C([a,b]) \to \mathbb{R}, \qquad \ell(g) := \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

et

$$\Psi : C([a,b]) \to C([a,b]), \qquad [\Psi(g)](x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

sont linéaires.

Dérivation. Soit

$$C^1([a,b]) = \{g : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, g \text{ est continûment dérivable sur } [a,b]\}.$$

Alors, la dérivation

$$D : C^1([a,b]) \to C([a,b]), \qquad [D(f)](x) := f'(x)$$

est une application linéaire.

Opérateur de décalage. Soit V l'espace vectoriel des suites réelles. Alors, **l'opérateur de décalage** [*shift operator*]

$$\Sigma : V \to V, \qquad \Sigma(v_0, v_1, v_2, \ldots) := (v_1, v_2, v_3, \ldots)$$

est une application linéaire.

On note $L(V,W)$ l'ensemble des applications linéaires de V vers W.

Définition 5.2 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels.*

(i) Une application linéaire $F \in L(V,W)$ qui est bijective s'appelle un ***isomorphisme (d'espace vectoriel)*** *[(vector space) isomporphism]. S'il existe un isomorphisme entre deux K-espace vectoriel V,W on dit que V et W sont* ***isomorphes*** *et on écrit*

$$V \cong W.$$

(ii) *Si $V = W$, une application linéaire $F \in L(V,V)$ est appelée un* ***endomorphisme****. Si de plus F est bijective on dit que F est un* ***automorphisme****.*

Soit $F_A : K^n \to K^m$, $F_A : x \mapsto Ax$ pour une matrice $A \in M_{m\times n}(K)$. Alors, les résultats de la section 3.4 donnent

$$F_A \text{ isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad m = n \text{ et } A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad F_A \text{ automorphisme.}$$

Définition 5.3 *Soient V, W deux K-espaces vectoriels et $F \in L(V,W)$. Le* ***noyau*** *[null space, kernel] et* ***l'image*** *de f sont définis comme suit :*

$$\mathrm{Ker}(F) := \{v \in V : F(v) = 0\}, \qquad \mathrm{Im}(F) := \{F(v) : v \in V\}.$$

Plus généralement, pour un sous-ensemble $\tilde{V} \subset V$, on note

$$F(\tilde{V}) := \{F(v) : v \in \tilde{V}\},$$

l'image de V par F. En particulier, $F(V) = \mathrm{Im}(F)$. Pour un sous-ensemble $\tilde{W} \subset W$, on note

$$F^{-1}(\tilde{W}) := \{v \in V : F(v) \in \tilde{W}\},$$

la pré-image [*pre-image*] par F de $\tilde{W}$. Cette notation est utilisée indépendamment du fait qu'il existe une réciproque à F ou non. Si $\tilde{W}$ ne contient qu'un élément w, on peut omettre les accolades : $F^{-1}(w) = F^{-1}(\{w\})$. En particulier, $F^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(F)$.

Le lemme suivant rassemble quelques propriétés des sous-espaces vectoriels et des applications linéaires.

Lemme 5.4 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels et $F \in L(V,W)$. Alors :*

(i) *Si $\tilde{V}$ est un sous-espace vectoriel de V, alors $F(\tilde{V})$ est un sous-espace vectoriel de W.*

(ii) *Si $\tilde{W}$ est un sous-espace vectoriel de W, alors $F^{-1}(\tilde{W})$ est un sous-espace vectoriel de V.*

(iii) *Si $v_1,\dots,v_n \in V$ sont linéairement dépendants, alors $F(v_1),\dots,F(v_n) \in W$ sont aussi linéairement dépendants.*

(iv) *Si $v_1,\dots,v_n \in V$ sont linéairement indépendants et F est injective, alors $F(v_1),\dots,F(v_n) \in W$ sont aussi linéairement indépendants.*

(v) $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$ *si et seulement si F est injective.*

(vi) $\mathrm{Im}(F) = W$ *si et seulement si F est surjective.*

(vii) *Si F est un isomporphisme, alors $F^{-1} \in L(W,V)$.*

DÉMONSTRATION. (i). Comme $0 \in \tilde{V} \Rightarrow F(0) \in F(\tilde{V})$, on a que l'ensemble $F(\tilde{V})$ est non vide. Soient $F(v_1),F(v_2) \in F(\tilde{V})$. Comme $\tilde{V}$ est un sous-espace vectoriel, on obtient

$$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) = F(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}_{\in \tilde{V}}) \in F(\tilde{V})$$

et, ainsi, $F(\tilde{V})$ est un sous-espace vectoriel.

(ii) Comme $F(0) = 0$ on a toujours $0 \in F^{-1}(\tilde{W})$ et, ainsi, l'ensemble $F^{-1}(\tilde{W})$ est non vide. Soient $v_1,v_2 \in F^{-1}(\tilde{W})$, c-à-d $F(v_1),F(v_2) \in \tilde{W}$. Comme $\tilde{W}$ est un sous-espace vectoriel, on obtient

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) \in \tilde{W}$$

et, ainsi, $F^{-1}(\tilde{W})$ est un sous-espace vectoriel.

(iii) Si $v_1,\dots,v_n$ sont linéairement dépendants alors il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ tels que $\alpha_j \neq 0$ pour certain j et $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Par (5.2) :

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = 0.$$

Alors $F(v_1),\dots,F(v_n)$ sont linéairement dépendants.

(iv) Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = 0$. Par (5.2), on a $F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$. Mais, $F(0) = 0$ et F est injective, alors $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Comme $v_1,\dots,v_n$ sont linéairement indépendants, on obtient $\alpha_i = 0$ pour $i = 1,\dots,n$.

(v). Par définition, l'injectivité de F implique que $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$. Soient $v_1,v_2 \in V$ tels que $F(v_1) = F(v_2)$. Alors $0 = F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2)$. Alors, on a $v_1 - v_2 = 0$, donc $v_1 = v_2$ et, ainsi, F est injective.

(vi) découle directement de la définition de surjectivité.

(vii) Comme F est bijective, on peut définir l'application $F^{-1} : W \to V$. Il reste à montrer que F^{-1} est linéaire. À cette fin, soient $w_1,w_2 \in W$. Alors, il existe $v_1,v_2 \in V$ tels que $w_1 = F(v_1)$, $w_2 = F(v_2)$. En utilisant que F est linéaire on obtient

$$\begin{aligned} F^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) &= F^{-1}(\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2)) = F^{-1}(F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 F^{-1}(w_1) + \alpha_2 F^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

et, ainsi, F^{-1} est linéaire. ■

Corollaire 5.5 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels et $F \in L(V,W)$. Alors,* $\mathrm{Ker}(F)$ *et* $\mathrm{Im}(F)$ *sont des sous-espaces vectoriels de V et W respectivement.*

Corollaire 5.6 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Supposons qu'il existe un isomorphisme $F : V \to W$. Alors,* $\dim V = \dim W$.

DÉMONSTRATION. Soit $v_1,\dots,v_n$ une base de V, alors $F(v_1),\dots,F(v_n)$ sont libres par le lemme 5.4 (iv). Soit $w \in W$. En posant $v := F^{-1}(w)$ il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ et donc $w = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n)$. Ainsi $F(v_1),\dots,F(v_n)$ est une base de W. ■

5.1.1 Le théorème du rang

Dans cette section on va établir une relation importante entre la dimension du noyau et celle d'image d'une application linéaire $F : V \to W$, lorsque V est de dimension finie.

Définition 5.7 *Soient V, W deux K-espaces vectoriels et $F \in L(V,W)$. On dénote par **le rang de F**, noté* $\mathrm{rang}(F)$*, la dimension de l'espace vectoriel* $\mathrm{Im}(F)$.

Lemme 5.8 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$. On considère l'application linéaire $F_A : K^n \to K^m$, $F_A : x \mapsto Ax$. Alors,*

$$\mathrm{rang}(F_A) = \mathrm{rang}(A),$$

où $\mathrm{rang}(A)$ *est le rang de la matrice A comme défini dans le chapitre 4.*

DÉMONSTRATION. Soit $Q \in M_{m\times m}(K)$ une matrice inversible telle que $C = QA$ est sous la forme échelonnée reduite (voir la définition 3.11). Comme $\mathrm{Im}(F_C)$ est constitué de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de C, on voit directement que

$$\mathrm{Im}(F_C) = \mathrm{span}(e_1,\dots,e_r).$$

L'application $x \to Qx$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}(F_A)$ vers $\mathrm{Im}(F_C)$ et ainsi, d'après le corollaire 5.6,

$$\mathrm{rang}(F_A) = \dim \mathrm{Im}(F_A) = \dim \mathrm{Im}(F_C) = r = \mathrm{rang}(A).$$

■

Par le lemme 5.4 on a l'inégalité

$$\dim \operatorname{Im}(F) \leq \dim V \tag{5.3}$$

pour toute $F \in L(V,W)$. Le théorème suivant quantifie la différence entre les deux cotés de (5.3).

Théorème 5.9 (Théorème du rang) *Soient V,W deux K-espaces vectoriels, où $\dim V < \infty$, et soit $F \in L(V,W)$. Alors,*

$$\dim V = \mathsf{rang}(F) + \dim \operatorname{Ker}(F).$$

DÉMONSTRATION. Soit $(v_1,\ldots,v_k)$ une base de $\operatorname{Ker}(F)$. Par le lemme 4.15, on peut la compléter en une base

$$(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n)$$

de V, où $n = \dim V$. L'assertion

$$(F(v_{k+1}),\ldots,F(v_n)) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(F) \tag{5.4}$$

montre le théorème car elle implique que $\mathsf{rang}(F) = n-k = \dim V - \dim \operatorname{Ker}(V)$.

Afin de montrer l'assertion (5.4), soit $v \in V$. Alors il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$ tels que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Comme F est linéaire, on obtient

$$\begin{aligned} F(v) &= \alpha_1 F(v_1) + \cdots \alpha_k F(v_k) + \alpha_{k+1} F(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n F(v_n) \\ &= \alpha_{k+1} F(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n F(v_n) \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{Im}(F) = \mathsf{span}(F(v_{k+1}),\ldots,F(v_n))$. Pour montrer l'indépendance linéaire, supposons que

$$0 = \alpha_{k+1} F(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = F(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n).$$

Cela signifie que $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Ker}(F)$. Alors, il existe $\beta_1,\ldots,\beta_k \in K$ tels que

$$\begin{aligned} &\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n. \\ \text{Donc } &\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \alpha_n v_n = 0. \\ \text{Donc } &\beta_1 = \cdots = \beta_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0, \end{aligned}$$

car $\{v_1,\ldots,v_n\}$ est une base de V. Donc la famille $(F(v_{k+1}),\ldots,F(v_n))$ est linéairement indépendante et donc (comme elle engendre $\operatorname{Im}(F)$) c'est une base de $\operatorname{Im}(F)$. ■

Corollaire 5.10 *Soient V, W deux K-espaces vectoriels, où $\dim V = \dim W < \infty$, $f \in L(V,W)$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) F est injective

(ii) F est surjective

(iii) F est bijective.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer l'équivalence entre l'injectivité et la surjectivité :

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(F) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathsf{rang}(F) = \dim V = \dim W \Leftrightarrow f \text{ surjective.} \end{aligned}$$

■

5.1.2 Composition des applications linéaires

Théorème 5.11 *Soient U, V, W trois K-espaces vectoriels et $F \in L(V,W)$, $G \in L(U,V)$. Alors $F \circ G \in L(U,W)$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} (F \circ G)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= F(G(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \\ &\overset{G \text{ linéaire}}{=} F(\alpha_1 G(v_1) + \alpha_2 G(v_2)) \\ &\overset{F \text{ linéaire}}{=} \alpha_1 F(G(v_1)) + \alpha_2 F(G(v_2)) \\ &= \alpha_1 (F \circ G)(v_1) + \alpha_2 (F \circ G)(v_2). \end{aligned}$$

■

Le diagramme suivant illustre l'ordre des applications du théorème 5.11 :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "F\circ G"] \arrow[dr, "G"'] & & W \\ & V \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$L(V,V)$, l'ensemble des endomorphismes de V, forme un anneau avec les deux lois de composition :

$$(F_1 + F_2)(v) := F_1(v) + F_2(v), \qquad (F_1 \circ F_2)(v) := F_1(F_2(v)).$$

5.2 Coordonées d'un vecteur, matrice d'une application linéaire

On a vu qu'un produit matrice-vecteur est une application linéaire $x \mapsto Ax$. Dans ce qui suit on va dans la direction opposée : Si on a une application linéaire arbitraire entre deux espaces vectoriels (de dimension finie) existe-t-il une matrice qui permet de représenter cette application ?

Théorème 5.12 *Soient V, W deux K-espaces vectoriels avec $\dim V = \dim W < \infty$. Soient $\mathscr{B}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}_W = (w_1, \ldots, w_n)$ des bases de V et W respectivement. Alors il existe une unique application linéaire $F : V \to W$ telle que*

$$F(v_i) = w_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Cette application linéaire est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Soit $v \in V$, alors v s'écrit de façon unique dans la base $\mathscr{B}_V$: $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. On définit

$$F(v) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Cette application vérifie (5.5) par construction.

Afin de montrer que F est linéaire, soit $\tilde{v} \in V$ tel que $\tilde{v} = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \cdots + \tilde{\alpha}_n v_n$ (où $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n \in K$) et $\beta \in K$. Alors

$$\begin{aligned} F(v + \tilde{v}) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \tilde{\alpha}_i) w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i w_i = F(v) + F(\tilde{v}) \\ F(\beta v) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta w_i = \beta \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \beta F(v), \end{aligned}$$

et ainsi F est linéaire.

Si $0 = F(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$ on obtient $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ par l'indépendance de $\mathscr{B}_W$. Alors F est injective par le lemme 5.4 (v) et ainsi F est bijective par le corollaire 5.10.

Il reste à montrer l'unicité d'une telle application linéaire. Supposons qu'il existe une autre application linéaire $\tilde{F} : V \to W$ telle que $F(v_i) = w_i$, $i = 1,\dots,n$. Pour $v \in V$ arbitraire avec $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, on obtient

$$F(v) - \tilde{F}(v) = F\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) - \tilde{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(F(v_i) - \tilde{F}(v_i)\big) = 0.$$

Donc $F = \tilde{F}$. ■

Corollaire 5.13 *Soient V, W deux K-espaces vectoriels et $\dim V < \infty$. Alors, V et W sont isomorphes si et seulement si W est de dimension finie et $\dim V = \dim W$.*

DÉMONSTRATION. $V \cong W$ dit qu'il existe un isomorphisme $F \in L(V,W)$ tel que $\mathrm{Im}(F) = W$ et $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$. Par le théorème 5.9, on a $\dim V = \mathsf{rang}(F) + \dim \mathrm{Ker}(F) = \dim(W)$. L'autre direction découle directement du théorème 5.12. ■

En posant $W = K^n$ et en choisissant la base canonique, on obtient le cas le plus intéressant du théorème 5.12.

Corollaire 5.14 *Soit V un K-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (v_1,\dots,v_n)$ une base de V. Alors il existe un unique isomporphisme*

$$[\cdot]_{\mathscr{B}} : V \to K^n \quad \text{tel que} \quad \big[v_i\big]_{\mathscr{B}} = e_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

où $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de K^n.

Définition 5.15 *L'isomorphisme $[\cdot]_{\mathscr{B}}$ s'appelle un* ***système de coordonnées*** *[coordinate system]. Pour $v \in V$ on note*

$$[v]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

les ***coordonnées*** *de v dans la base $\mathscr{B}$.*

Afin de déterminer les coordonnées on écrit v dans la base $\mathscr{B}$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n. \tag{5.6}$$

Cela donne $[v]_{\mathscr{B}} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)^{\mathsf{T}}$. Le calcul de (5.6) n'est simple que pour des bases triviales.

Quelques exemples :

Polynômes. On considère le K-espace vectoriel

$$K_n[t] := \{p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \mid \alpha_0,\dots,\alpha_n \in K\},$$

qui possède la base $\mathscr{B} = (1,t,\dots,t^n)$. D'habitude on représente un polynôme dans cette base :

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \quad \Rightarrow \quad [p]_{\mathscr{B}} = (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)^{\mathsf{T}}.$$

Soit

$$\mathscr{C} = (v_0,v_1,\dots,v_n) = (1,1+t,1+t+t^2,\dots,1+t+\cdots+t^n)$$

une autre base. Pour calculer les coordonnées dans cette base du polynôme ci-dessus $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ on pose $p = \beta_0 v_0 + \cdots \beta_n v_n$ et on utilise la relation $v_i = 1 + t + \cdots + t^i$:

$$p = \sum_{j=0}^{n} \beta_j v_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \beta_j t^i = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{j=i}^{n} \beta_j \Big) t^i.$$

La comparaison des coefficients avec $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ donne le système linéaire

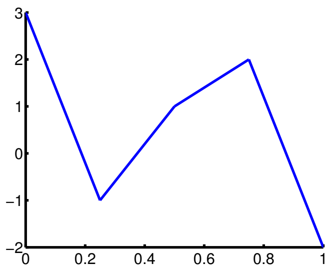
$$\sum_{j=i}^{n} \beta_j = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{c-à-d} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Par simple substitution, on obtient

$$[p]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Fonctions continues affines par morceaux. On considère une partition de l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles $[0,h],[h,2h],\ldots,[(n-1)h,1]$, où $h = 1/n$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **affine par morceaux** [*piecewise linear*] si sa restriction à chacun de ces sous-intervalles est donnée par une expression affine $(\alpha t + \beta)$. Soit V l'ensemble des fonctions qui sont continues sur I et affines par morceaux. Alors V est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C(I)$.

La figure à droite montre une de ses fonctions pour $n = 4$. Une base de V est donnée par



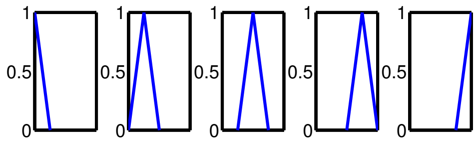
$$b_0(t) := \max\{1 - t/h, 0\},$$

$$b_i(t) := \begin{cases} (t-(i-1)h)/h, & t \in [(i-1)h, ih], \\ -(t-(i+1)h)/h, & t \in [ih, (i+1)h], \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$b_n(t) := \max\{(t-(n-1)h)/h, 0\},$$

où $i = 1, \ldots, n-1$.

Une illustration des 5 fonctions de base pour $n = 4$:



Une fonction f continue affine par morceaux s'écrit dans cette base

$$f(t) = f(0)b_0(t) + f(h)b_1(t) + \cdots + f\big((n-1)h\big)b_{n-1}(t) + f(1)b_n(t).$$

Alors les coordonnées de f sont $\big(f(0), f(h), \ldots, f(1)\big)^{\mathsf{T}}$. Par exemple, les coordonnées de la fonction montrée ci-dessus sont $(3,-1,1,2,-2)^{\mathsf{T}}$.

5.2.1 Matrice d'une application linéaire

Soient V, W deux K-espaces vectoriels et $\mathscr{B}_V = (v_1,\dots,v_n)$ et $\mathscr{B}_W = (w_1,\dots,w_m)$ des bases de V et W respectivement. Soit $F \in L(V,W)$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_V}}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_W}}"] \\ K^n \arrow[r, "F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}"] & K^m \end{tikzcd}$$

Par leur définition, on sait que $[\cdot]_{\mathscr{B}_V}$ et $[\cdot]_{\mathscr{B}_W}$ sont des applications linéaires. Comme l'inverse et la composition d'application linéaire sont encore des applications linéaires,

$$F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} := [\cdot]_{\mathscr{B}_W} \circ F \circ [\cdot]_{\mathscr{B}_V}^{-1} : K^n \to K^m. \tag{5.7}$$

est une application linéaire.

Lemme 5.16 *Soit $G \in L(K^n,K^m)$. On munit K^n, K^m de leurs bases canoniques respectives. Alors il existe une unique matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ telle que $G(x) = Ax \; \forall x \in K^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G(e_i) = \underbrace{\big(G(e_1),G(e_2),\dots,G(e_n)\big)}_{=:A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = Ax,$$

ce qui montre l'existence d'une telle matrice A.

Afin de montrer l'unicité supposons qu'il existe $\tilde{A} \in M_{m\times n}(K)$ telle que $\tilde{A}x = G(x) = Ax$. En choisissant $x = e_j$ on obtient que les colonnes j de A et $\tilde{A}$ sont égales pour $j = 1,\dots,n$. Alors, $\tilde{A} = A$. ■

Définition 5.17 *On note $[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}$ la matrice A du lemme précédent lorsque $G = F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}$. On l'appelle **matrice de l'application linéaire** F [matrix representation of F] par rapport aux bases $\mathscr{B}_V$ et $\mathscr{B}_W$.*

D'après la démonstration du lemme 5.16 on a

$$[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} = \Big(F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(e_1), F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(e_2), \dots, F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(e_n)\Big) \in M_{m\times n}(K),$$

d'où

$$F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(e_j) = \big([\cdot]_{\mathscr{B}_W} \circ F \circ [\cdot]_{\mathscr{B}_V}^{-1}\big)(e_j) = \big([\cdot]_{\mathscr{B}_W} \circ F\big)(v_j) = \big[F(v_j)\big]_{\mathscr{B}_W}$$

Cela signifie que les coordonnées de $F(v_j) \in W$ dans la base $\mathscr{B}_W$ donne la j-ième colonne de $F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}$. Alors on exprime

$$F(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m, \qquad a_{1j},\dots,a_{mj} \in K,$$

et on obtient que

$$F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad [F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Exemple 5.18 Soit $V = W = \mathbb{R}_3[t]$. La dérivation est une application linéaire :

$$D \in L(V,V), \quad D(p) := p'.$$

Afin de calculer la matrice de D par rapport à la base $\mathscr{B} = (1,t,t^2,t^3)$ de V, on applique D sur tout élément de base :

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 1, \quad D(t^2) = 2t, \quad D(t^3) = 3t^2,$$

et puis on exprime les résultats dans la base $\mathscr{B}$. Dans ce cas c'est facile et on obtient

$$[D]_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Théorème 5.19 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{B}_V$, $\mathscr{B}_W$ des bases de V et W respectivement. Alors l'application*

$$\Psi : L(V,W) \to M_{m\times n}(K), \qquad F \mapsto [F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W},$$

où $n = \dim V$ et $m = \dim W$, est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier, $L(V,W) \cong M_{m\times n}(K)$.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 5.16 et par la linéarité des applications concernées,

$$\begin{aligned}
\Psi(F+G) &= \Big(\big[F(v_1)+G(v_1)\big]_{\mathscr{B}_W}, \dots, \big[F(v_n)+G(v_n)\big]_{\mathscr{B}_W} \Big) \\
&= \Big(\big[F(v_1)\big]_{\mathscr{B}_W} + \big[G(v_1)\big]_{\mathscr{B}_W}, \dots, \big[F(v_n)\big]_{\mathscr{B}_W} + \big[G(v_n)\big]_{\mathscr{B}_W} \Big) \\
&= \Big(\big[F(v_1)\big]_{\mathscr{B}_W}, \dots, \big[F(v_n)\big]_{\mathscr{B}_W} \Big) + \Big(\big[G(v_1)\big]_{\mathscr{B}_W}, \dots, \big[G(v_n)\big]_{\mathscr{B}_W} \Big) \\
&= \Psi(F) + \Psi(G)
\end{aligned}$$

pour tout $F,G \in L(V,W)$. De même $\Psi(\alpha F) = \alpha\Psi(F)$ pour tous $\alpha \in K$ et toutes $F \in L(V,W)$.

Soit $\Psi(F) = [F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} = 0 \in M_{m\times n}(K)$, alors

$$0 = [\cdot]_{\mathscr{B}_W} \circ F \circ [\cdot]^{-1}_{\mathscr{B}_V}, \quad \text{donc} \quad 0 = [\cdot]^{-1}_{\mathscr{B}_W} \circ [\cdot]_{\mathscr{B}_W} \circ F \circ [\cdot]^{-1}_{\mathscr{B}_V} \circ [\cdot]_{\mathscr{B}_V} = F.$$

Par le lemme 5.4 (v), cela signifie que Ψ est injective. Afin de montrer la surjectivité, soit

$$A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

une matrice arbitraire. On cherche $F : V \to W$ linéaire telle que

$$\Psi(F) = \Big(\big[F(v_1)\big]_{\mathscr{B}_W}, \dots, \big[F(v_n)\big]_{\mathscr{B}_W} \Big) = (a_1, \dots, a_n).$$

On pose $F(v_j) := \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ que l'on étend par linéarité pour tout vecteur $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ quelconque par $F(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j F(v_j)$. Cette application est linéaire par construction et l'on a bien $\Psi(f) = A$. ■

Corollaire 5.20 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels avec $\dim V = n < \infty$ et $\dim W = m < \infty$. Alors $\dim L(V,W) = m \cdot n$.*

DÉMONSTRATION. La dimension de $M_{m\times n}(K)$ est $m\cdot n$. Par le théorème 5.19, $M_{m\times n}(K)$ et $L(V,W)$ sont isomorphes. Alors l'assertion découle du fait que deux espaces vectoriels qui sont isomorphes ont la même dimension. ■

Le résultat suivant montre que la composition d'applications linéaires correspond à la multiplication matricielle des matrices associées.

Théorème 5.21 *Soient U,V,W des K-espaces vectoriels de dimension finie avec des bases respectives $\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W$. Soient $G : U \to V$ et $F : V \to W$ des applications linéaires. Alors*

$$[F\circ G]_{\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_W} = [F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}\cdot[G]_{\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_V}.$$

DÉMONSTRATION. Posons $m = \dim U$, $n = \dim V$, $r = \dim W$ et $A = [F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}$, $B = [G]_{\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_V}$. Alors le diagramme suivant est commutatif[6] :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "F\circ G"] \arrow[dr, "G"'] \arrow[ddd, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_U}}"'] & & W \arrow[ddd, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_W}}"] \\
& V \arrow[ur, "F"'] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_V}}"'] & \\
& K^n \arrow[dr, "A"] & \\
K^m \arrow[ur, "B"] \arrow[rr, "A\cdot B"'] & & K^r
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme permet de « lire » l'assertion du théorème en choisissant deux chemins différents de K^m vers K^r, ce qui donne $F_{AB} = (F\circ G)_{\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_W}$ et donc $AB = [F\circ G]_{\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_W}$.

On peut aussi vérifier l'assertion par le calcul suivant :

$$F_{AB} = [\cdot]_{\mathscr{B}_W}\circ F\circ[\cdot]^{-1}_{\mathscr{B}_V}\circ[\cdot]_{\mathscr{B}_V}\circ G\circ[\cdot]^{-1}_{\mathscr{B}_U} = [\cdot]_{\mathscr{B}_W}\circ(F\circ G)\circ[\cdot]^{-1}_{\mathscr{B}_U} = (F\circ G)_{\mathscr{B}_U,\mathscr{B}_W}.$$

■

Corollaire 5.22 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels avec des bases $\mathscr{B}_V$ et $\mathscr{B}_W$ respectivement. Supposons que $\dim(V) = \dim(W)$ et soit $F \in L(V,W)$ bijective. Alors*

$$\left[F^{-1}\right]_{\mathscr{B}_W,\mathscr{B}_V} = \left([F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}\right)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 5.21

$$\left[F^{-1}\right]_{\mathscr{B}_W,\mathscr{B}_V}[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} = \left[F^{-1}\circ F\right]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_V} = [I]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_V} = I_{\dim(V)},$$

où $I : V \to V$ est l'application identité, et donc $\left[F^{-1}\right]_{\mathscr{B}_W,\mathscr{B}_V}$ est l'inverse de $[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}$. ■

5.2.2 Changement de bases

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soient

$$\mathscr{B} = (v_1,\dots,v_n), \qquad \tilde{\mathscr{B}} = (\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_n)$$

6. En algèbre linéaire un diagramme commutatif est un graphe orienté avec des espaces vectoriels comme nœuds et des applications linéaires comme arcs, tels que, lorsque l'on choisit deux espaces vectoriels, on peut suivre un chemin quelconque à travers le diagramme et obtenir le même résultat par composition des applications linéaires.

deux bases de V. Le diagramme correspondant :

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rr, "I_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}}"] & & K^n \\
& V \arrow[ul, "{[\cdot]_{\mathscr{B}}}"] \arrow[ur, "{[\cdot]_{\tilde{\mathscr{B}}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

L'application linéaire $I_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} : K^n \to K^n$ des coordonnées dans $\mathscr{B}$ vers des coordonnées dans $\tilde{\mathscr{B}}$ est donnée par

$$I_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} = [\cdot]_{\tilde{\mathscr{B}}} \circ [\cdot]_{\mathscr{B}}^{-1}.$$

Alors la multiplication par $[I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} \in M_{n\times n}(K)$ transforme les coordonnées d'un vecteur $v \in V$ dans $\mathscr{B}$ en celles dans $\tilde{\mathscr{B}}$:

$$[v]_{\tilde{\mathscr{B}}} = [I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}}[v]_{\mathscr{B}}.$$

Définition 5.23 *La matrice $[I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}}$ est appelée **matrice de passage** (ou **matrice de changement de base**) de la base $\mathscr{B}$ à la base $\tilde{\mathscr{B}}$.*

Afin de déterminer $[I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} \in M_{n\times n}(K)$ on procéde comme dans la section 5.2.1 :

$$[I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} = \Big(\big[I(v_1)\big]_{\tilde{\mathscr{B}}}, \ldots, \big[I(v_n)\big]_{\tilde{\mathscr{B}}} \Big) = \Big(\big[v_1\big]_{\tilde{\mathscr{B}}}, \ldots, \big[v_n\big]_{\tilde{\mathscr{B}}} \Big)$$

Cela signifie qu'on exprime l'élément v_j de base $\mathscr{B}$ dans la base $\tilde{\mathscr{B}}$:

$$v_j = a_{1j}\tilde{v}_1 + \tilde{v}_{2j}w_2 + \cdots + \tilde{v}_{nj}w_n.$$

Alors $[I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$.

Dans le cas particulier $V = K^n$ on peut écrire les éléments des bases $\mathscr{B}$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ comme les colonnes des matrices

$$B = \big(v_1, \ldots, v_n\big) \in K^{n\times n}, \qquad \tilde{B} = \big(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\big) \in K^{n\times n}.$$

Comme $Bx = [x]_{\mathscr{B}}^{-1}$ et $\tilde{B}x = [x]_{\tilde{\mathscr{B}}}^{-1}$ on obtient

$$[I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} = \tilde{B}^{-1}B.$$

par le théorème 5.21.

Remarque 5.24 *Par le corollaire 5.22, $\big([I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}}\big)^{-1} = [I]_{\tilde{\mathscr{B}},\mathscr{B}}$.*

Le théoreme suivant est le résultat central de cette section. Il décrit le changement de la matrice d'une application linéaire sous un changement de bases.

Théorème 5.25 *Soient V, W deux K-espaces vectoriels de dimension finie. On considère des bases $\mathscr{B}_V, \tilde{\mathscr{B}}_V$ de V et des bases $\mathscr{B}_W, \tilde{\mathscr{B}}_W$ de W. Alors pour $F \in L(V,W)$ on a*

$$[F]_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\tilde{\mathscr{B}}_W} = [I]_{\mathscr{B}_W,\tilde{\mathscr{B}}_W} \cdot [F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} \cdot [I]_{\mathscr{B}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V}^{-1}. \tag{5.10}$$

DÉMONSTRATION. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}"] \arrow[dd, "I_{\mathscr{B}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V}"'] & & & K^m \arrow[dd, "I_{\mathscr{B}_W,\tilde{\mathscr{B}}_W}"] \\
& V \arrow[r, "F"] \arrow[ul, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_V}}"'] \arrow[dl, "{[\cdot]_{\tilde{\mathscr{B}}_V}}"] & W \arrow[ur, "{[\cdot]_{\mathscr{B}_W}}"] \arrow[dr, "{[\cdot]_{\tilde{\mathscr{B}}_W}}"'] & \\
K^n \arrow[rrr, "F_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\tilde{\mathscr{B}}_W}"'] & & & K^m
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif parce que tout sous-diagramme est commutatif. En particulier, on obtient

$$F_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\tilde{\mathscr{B}}_W} = I_{\mathscr{B}_W,\tilde{\mathscr{B}}_W} \circ F_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W} \circ I^{-1}_{\mathscr{B}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V}$$

en choisissant les chemins correspondants dans le diagramme. Ainsi, (5.10) découle du théorème 5.21 et de la remarque 5.24. ■

Par le théorème 5.25, deux matrices de la même application linéaire sont toujours équivalentes (voir la définition 3.16).

Corollaire 5.26 *Soient V,W deux K-espaces vectoriels de dimension finie et soit $F \in L(V,W)$. Alors il existe des bases $\tilde{\mathscr{B}}_V$ et $\tilde{\mathscr{B}}_W$ telles que*

$$[F]_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\tilde{\mathscr{B}}_W} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

où $r = \mathsf{rang}(F)$.

DÉMONSTRATION. Soient $\mathscr{B}_V = (v_1,\dots,v_n)$, $\mathscr{B}_W = (w_1,\dots,w_m)$ des bases quelconques de V, W. Considérons $[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}$ la matrice de l'application linéaire par rapport aux bases $\mathscr{B}_V$, $\mathscr{B}_W$. Par le théorème 3.17 il existe des matrices inversibles $P \in M_{m\times m}(K)$, $Q \in M_{n\times n}(K)$ telles que

$$P^{-1}[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

En posant $\tilde{\mathscr{B}}_V = (\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_n)$ avec $\tilde{v}_j := \big[Q\cdot[v_j]_{\mathscr{B}_V}\big]^{-1}_{\mathscr{B}_V}$ on obtient

$$Qe_j = [\tilde{v}_j]_{\mathscr{B}_V} = \big([\cdot]_{\mathscr{B}_V}\circ[\cdot]^{-1}_{\tilde{\mathscr{B}}_V}\big)(e_j) = [I]_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\mathscr{B}_V}e_j \quad\Rightarrow\quad [I]_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\mathscr{B}_V} = Q.$$

De façon analogue, on peut choisir $\tilde{\mathscr{B}}_W$ telle que $[I]_{\tilde{\mathscr{B}}_W,\mathscr{B}_W} = P$. Ainsi (5.12) devient

$$[I]_{\mathscr{B}_W,\tilde{\mathscr{B}}_W}[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}[I]^{-1}_{\mathscr{B}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et (5.11) découle du théorème 5.25. ■

Pour un endomorphisme $F \in L(V,V)$ on choisit typiquement la même base $\mathscr{B}_V$ pour l'espace de départ et l'espace de arrivée. Par le théorème 5.25, un changement de base de $\mathscr{B}_V$ à $\tilde{\mathscr{B}}_V$ effectue la transformation suivante :

$$[F]_{\tilde{\mathscr{B}}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V} = [I]_{\mathscr{B}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V}\cdot[F]_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_V}\cdot[I]^{-1}_{\mathscr{B}_V,\tilde{\mathscr{B}}_V}. \tag{5.13}$$

C'est un cas particulier d'équivalence de matrices.

Définition 5.27 *Deux matrices $A,B \in M_{n\times n}(K)$ sont dites* ***semblables*** *[similar] s'il existe une matrice inversible $P \in M_{n\times n}(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$.*

Comme pour les matrices équivalentes, « être semblable » définit une relation d'équivalence sur les matrices $n\times n$.

Exemple 5.28 On continue l'exemple 5.18. On a vu la matrice (5.9) de la dérivation $D \in L(V,V)$, $V = \mathbb{R}_3[t]$, par rapport à $\mathscr{B} = (1,t,t^2,t^3)$. Ètant donnée une autre base

$$\tilde{\mathscr{B}} = (1,1+t,1+t+t^2,1+t+t^2+t^3)$$

on a

$$[I]_{\tilde{\mathscr{B}},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} = [I]^{-1}_{\tilde{\mathscr{B}},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de D par rapport à $\tilde{\mathscr{B}}$ est donnée par

$$\begin{aligned} [D]_{\tilde{\mathscr{B}},\tilde{\mathscr{B}}} &= [I]_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}}[D]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}[I]^{-1}_{\mathscr{B},\tilde{\mathscr{B}}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par exemple pour

$$p = 1 + t + t^2 + t^3, \quad \text{on a} \quad [p]_{\tilde{\mathscr{B}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Donc} \quad [D]_{\tilde{\mathscr{B}},\tilde{\mathscr{B}}}[p]_{\tilde{\mathscr{B}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\Big[[D]_{\tilde{\mathscr{B}},\tilde{\mathscr{B}}}[p]_{\tilde{\mathscr{B}}}\Big]^{-1}_{\tilde{\mathscr{B}}} = -1 - (1+t) + 3(1+t+t^2) = 1 + 2t + 3t^2 = p'.$$

♦