Chapitre 4
Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel est la structure de base de l'algèbre linéaire.

4.1 Définitions

$(K, +, \cdot)$ désigne un corps dans ce chapitre.

Définition 4.1 *Un* ***K-espace vectoriel*** *[vector space, linear space] est un ensemble muni de deux lois*

$$\begin{array}{llr} + : V \times V \to V, & (v,w) \mapsto v+w, & \textit{(addition de vecteurs)} \\ \cdot : K \times V \to V, & (\alpha,v) \mapsto \alpha \cdot v, & \textit{(multiplication par un scalaire)} \end{array} \tag{4.1}$$

vérifiant :

(i) $(V,+)$ *est un groupe abélien.*
(ii) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v, \quad \forall \alpha,\beta \in K, v \in V.$ *(compatibilité·)*
(iii) $1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V.$ *(neutralité* 1*)*
(iv) $(\alpha+\beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v), \quad \forall \alpha,\beta \in K, v \in V.$ *(distributivité I)*
(v) $\alpha \cdot (v+w) = (\alpha \cdot v) + (\alpha \cdot w), \quad \forall \alpha \in K, v,w \in V.$ *(distributivité II)*

Quelques remarques:

– La définition 4.1 utilise les mêmes symboles $+$ / $\cdot$ aussi bien pour l'addition / la multiplication dans K que pour l'addition / la multiplication par un scalaire dans V. On comprend normalement la significiation de ces symboles à partir du contexte.
– On omet souvent le $\cdot$, par exemple on écrit $\alpha \cdot v = \alpha v$. On peut écrire $\alpha\beta v = \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ grace à la compatibilité de $\cdot$. En plus, la multiplication par un scalaire est prioritaire sur l'addition, par exemple $\alpha v + \beta w = (\alpha v) + (\beta w)$.
– La stabilité des deux lois de composition est une hypothèse importante cachée dans (4.1).
– Comme d'habitude on écrit $v - w := v + (-w)$.
– Les éléments de V s'appellent des **vecteurs**[4] et les éléments de K des **scalaires**.

Exemples d'espaces vectoriels

Matrices. $M_{m\times n}(K)$ est un K-espace vectoriel avec l'addition des matrices et avec la multiplication par un scalaire comme définies au chapitre 1.

4. On ne peut pas confondre les vecteurs colonnes ou lignes du chapitre 1 avec la notion plus générale de vecteur comme un élément d'un espace vectoriel.

Vecteurs colonnes. En particulier, $K^n = M_{n\times 1}(K)$ est un K-espace vectoriel. C'est le prototype d'un espace vectoriel. En effet, on va voir dans la section 5.2 que tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à K^n pour un certain n.

Polynômes. L'ensemble de polynômes $K[t]$ est un K-espace vectoriel avec l'addition des polynômes comme définie à la page 26 et avec la multiplication par un scalaire comme suit :

$$\cdot : K \times K[t] \to K[t] \qquad \cdot : (\lambda, p) \mapsto \lambda \cdot p = \lambda p,$$

où $\lambda p(t) = \lambda \alpha_0 + \lambda \alpha_1 t + \lambda \alpha_2 t^2 + \cdots + \lambda \alpha_n t^n$ pour un pôlynome $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n$.

Suites. Soient $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, où $v_n \in K$ $\forall n \geq 1$, et $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, où $w_n \in K$ $\forall n \geq 1$, deux suites. En définissant

$$v + w := \{v_n + w_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \cdot v := \{\alpha v_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \in K,$$

cet ensemble des suites d'éléments de K devient un K-espace vectoriel.

Applications. Soit E un ensemble non vide et soit $\mathsf{App}(E,K)$ l'ensemble des applications $f : E \to K$ défini dans la section 2.2. Muni de deux lois

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad \forall f, g \in \mathsf{App}(E,K),\ \alpha \in K,$$

$\mathsf{App}(X,K)$ est un K-espace vectoriel.

Le lemme suivant contient quelques propriétés qui semblent triviales.

Lemme 4.2 *Soit V un K-espace vectoriel. Alors,*

(i) $\underbrace{0}_{\in K} \cdot v = \underbrace{0}_{\in V}$ *pour tout* $v \in V$*,*

(ii) $\alpha \cdot \underbrace{0}_{\in V} = \underbrace{0}_{\in V}$ *pour tout* $\alpha \in K$*,*

(iii) $(-1) \cdot v = -v$ *pour tout* $v \in V$*,*

(iv) $-(\alpha \cdot v) = (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v)$ *pour tout* $\alpha \in K$, $v \in V$*,*

(v) $\alpha \cdot v = 0$ *si et seulement si* $\alpha = 0$ *ou* $v = 0$*.*

DÉMONSTRATION. (i) $0 = 0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. En ajoutant l'inverse de $0 \cdot v$ de chaque côté, il vient $0 \cdot v = 0$.
(ii) $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$. En ajoutant l'inverse de $\alpha \cdot 0$ de chaque côté, il vient $\alpha \cdot 0 = 0$.
(iii) $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$.
(iv) $(-\alpha) \cdot v = (-1) \cdot (\alpha \cdot v) = -(\alpha \cdot v)$. $\quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot ((-1) \cdot v) = \alpha \cdot (-v)$.
(v) On suppose que $\alpha \cdot v = 0$. Si $\alpha = 0$ alors on a fini. Sinon $v = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$. Réciproquement si $\alpha = 0$ ou $v = 0$ alors (ii) et (i) montrent que $\alpha \cdot v = 0$. ■

4.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.3 *Soit V un K-espace vectoriel. Une partie W de V s'appelle un* ***sous-espace vectoriel*** *[subspace] de V si W muni des deux lois de composition de V (restreintes à W) fait de W un K-espace vectoriel.*

Lemme 4.4 *Soit V un K-espace vectoriel et $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Alors W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si*

(i) $v + w \in W$ *pour tous* $v, w \in W$*, et*

(ii) $\alpha v \in W$ *pour tous* $\alpha \in K$, $v \in W$.

DÉMONSTRATION. Que les conditions (i) et (ii) soient nécessaires découle directement de la définition d'un K-sous-espace vectoriel.

La suffisance des conditions : Comme $W \neq \emptyset$ on prend un $v \in W$. Par (ii) $(-1)\cdot v = -v \in W$ et donc $-v+v = 0 \in W$, ceci montre que $(W,+)$ est un groupe abélien (la commutativité et l'associativité sont heritées de celle de V). Les propriétés (ii) à (v) de la définition 4.1 sont vraies dans W car elles sont vraies dans V. ■

Il est recommandé de vérifier d'abord $0 \in W$, où 0 est le vecteur nul de V. En même temps ceci vérifie la première condition du lemme 4.4, que W soit non-vide. En fait, $\{0\}$ lui-même est un sous-espace vectoriel de V, ainsi que V. Bien sûr, les cas interessants se situent entre ces deux extrêmes.

Exemples des sous-espaces vectoriels

Solutions d'un système linéaire homogène. Soit $A \in M_{m\times n}(K)$. L'ensemble des solutions $S(A,0) = \{x \in K^n \,|\, Ax = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de K^n. En effet $S(A,0)$ est non-vide car $A \cdot 0 = 0$ et ainsi $0 \in S(A,0)$. Les conditions (i) et (ii) du lemme 4.4 :

$$\begin{aligned} x,y \in S(A,0) \;&\Rightarrow\; Ax = 0, Ay = 0 \;\Rightarrow\; A(x+y) = 0 \;\Rightarrow\; x+y \in S(A,0), \\ x \in S(A,0) \;&\Rightarrow\; Ax = 0 \;\Rightarrow\; \alpha Ax = A(\alpha x)0 \;\Rightarrow\; \alpha x \in S(A,0), \end{aligned}$$

sont verifiées.

Matrices symétriques. L'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $M_{n\times n}(K)$.

Polynômes. Étant donné un entier n, on définit

$$K_n[t] := \{p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \,|\, \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K\},$$

l'ensemble des pôlynomes de degré inférieur ou égal à n. Comme l'addition des deux pôlynomes $p,q \in K_n$ et la multiplication de $p \in K_n$ par un scalaire sont encore des pôlynomes de degré inférieur ou égal à n, on a que $K_n[t]$ est un sous-espace vectoriel de $K[t]$. En outre, $K_m[t]$ est un sous-espace vectoriel de $K_n[t]$ si $m \leq n$.

Suites convergentes. On reprend V le K-espace vectoriel des suites sur K. Soient deux suites convergentes $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ avec $v_n \overset{n\to\infty}{\to} \bar{v} \in K$ et $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ avec $w_n \overset{n\to\infty}{\to} \bar{w} \in K$. Alors

$$v_n + w_n \overset{n\to\infty}{\to} \bar{v} + \bar{w} \quad \text{et} \quad \alpha v_n \overset{n\to\infty}{\to} \alpha \bar{v},$$

c-à-d les suites convergentes forment un sous-espace vectoriels de V. (On remarque que la suite $\{0\}_{n=1}^{\infty}$ est convergente.)

Attention ! $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\mathbb{R}^2$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^3$. Mais

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,|\, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

En rajoutant les vecteurs qui manquent, selon le lemme 4.4, on peut transformer n'importe quelle famille de vecteurs en un sous-espace vectoriel.

Définition 4.5 *Soit V un K-espace vectoriel et $v_1,\dots,v_n \in V$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$. Un vecteur*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in V,$$

s'appelle une ***combinaison linéaire*** *[linear combination] de $v_1,\dots,v_n$. On dénote par*

$$\mathsf{span}(v_1,\dots,v_n) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,|\, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K \Big\}$$

l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1,\dots,v_n$.

On rappelle que tout produit matrice vecteur est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice, voir (1.13).

On peut élargir la définition 4.5 en prennant une infinité de vecteurs. À cette fin soit une famille de vecteurs[5] $(v_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble d'indices fini ou infini. Alors on définit $\mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$ par l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles d'un nombre fini de vecteurs :

$$\mathsf{span}(v_i)_{i\in I} := \big\{ \alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_n v_{i_n} :\ n \in \mathbb{N}, \{i_1,\dots,i_n\} \subseteq I, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K \big\}.$$

Lemme 4.6 *Soit V un K-espace vectoriel et $(v_i)_{i\in I} \subset V$. Alors $\mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de V.*

DÉMONSTRATION. $\mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$ est non vide car il contient 0. Soient $x,y \in \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$, ainsi il existe deux ensembles d'indices finis $I_x, I_y \subset I$ et des coefficients $\alpha_i, \beta_i \in K$ tels que

$$x = \sum_{i\in I_x} \alpha_i v_i, \qquad y = \sum_{i\in I_y} \beta_i v_i.$$

Alors,

$$x + y = \sum_{i\in I_x\cup I_y} (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}, \quad \lambda x = \sum_{i\in I_x} (\lambda \alpha_i) v_i \in \mathsf{span}(v_i)_{i\in I},$$

où on prend $\alpha_i = 0$ si $i \notin I_x$ et $\beta_i = 0$ si $i \notin I_y$. ■

Le sous-espace vectoriel $\mathsf{span}(v_1,\dots,v_n)$ est appelé le **sous-espace vectoriel engendré** [*linear hull, span*] par $v_1,\dots,v_n$. De façon analogue pour une famille générale $(v_i)_{i\in I}$. On pose $\{0\} \subset V$ le sous-espace vectoriel engendré par une famille vide (I est vide).

Exemple 4.7 (i) Soit $V = K^n$. Tout vecteur colonne $x \in K^n$ est un combinaison linéaire des vecteurs colonnes $e_1,\dots,e_n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

En particulier $K^n = \mathsf{span}\{e_1,\dots,e_n\}$.

(iii) On considère l'espace vectoriel des suites sur K et les suites

$$\begin{aligned} z_1 &= (1,0,0,0,0,\dots) \\ z_2 &= (0,1,0,0,0,\dots) \\ z_3 &= (0,0,1,0,0,\dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. Au contraire d'un ensemble, une famille peut contenir des éléments repétés, c-à-d deux indices distincts dans I peuvent correspondre au même vecteur.

Une suite peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $z_1, z_2, \ldots$ si et seulement si elle contient un nombre *fini* de coefficients non nuls. Par exemple, la suite $(1,1,1,\ldots)$ n'est pas une combinaison linéaire de $z_1, z_2, \ldots$.

Lemme 4.8 *Soit V un K-espace vectoriel est soit U, W deux sous-espaces vectoriels de V. Alors $U \cap W$ est un sous-espace vectoriel de V.*

DÉMONSTRATION. Exercices. ■

4.3 Indépendance linéaire, bases, dimensions

On a vu précédemment qu'une famille de vecteurs engendre un sous-espace vectoriel. Dans cette section on va dans la direction opposée : Étant donné un (sous-)espace vectoriel on cherche une famille de vecteurs, aussi petite que possible, qui l'engendre.

Définition 4.9 *Soit V un K-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_r \in V$. On dit que $v_1, \ldots, v_r$* ***engendrent*** *[generate] V ou que la famille $(v_1, \ldots, v_r)$ est une* ***famille génératrice*** *[generator] de V si $V = \mathsf{span}(v_1, \ldots, v_r)$. Plus généralement, on dit qu'une famille (eventuellement infinie) $(v_i)_{i\in I} \subset V$ est une* ***famille génératrice*** *de V si $V = \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$.*

Une famille génératrice n'est pas unique. Par exemple, les deux familles

$$(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

engendrent $\mathbb{R}^3$. On trouve que tout vecteur s'ecrit de façon unique comme une combinaison linéaire de la première famille. En particulier, on a

$$0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

C'est different pour la deuxième famille. Par exemple,

$$0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + (-1) \cdot v_4.$$

Définition 4.10 *Soit V un K-espace vectoriel. Une famille $(v_1, \ldots, v_r)$ de V est dite* ***linéairement indépendante*** *[linearly independent] ou* ***libre*** *si $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ l'équation (vectorielle)*

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r,$$

n'admet que la solution triviale

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Une famille (eventuellement infinie) $(v_i)_{i\in I} \subset V$ est dite linéairement indépendante ou libre si toutes ses parties finies sont libres.

Si une famille $(v_1, \ldots, v_r)$ ne satisfait pas les exigences de la définition 4.10, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, dont au moins un coefficient α_j est non nul, tels que $0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Une famille qui n'est pas linéairement indépendante est dite **linéairement dépendante** ou **liée**.

Exemple 4.11 Soient $a_1, \ldots, a_r \in K^n$. En définissant $A = (a_1, \ldots, a_r) \in K^{n\times r}$, ces vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

ainsi $S(A, 0) = \{0\}$. Selon la section 3.4, cette condition est équivalente à $\mathsf{rang}(A) = r$. ♦

Trivialement, une famille contenant le vecteur nul ne peut pas être linéairement indépendante. Tout comme une famille contenant deux fois le même vecteur n'est pas linéairement indépendante. Alors, on peut considérer une famille linéairement indépendante comme un ensemble non-ordonné.

Lemme 4.12 *Soit V un K-espace vectoriel et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de V. Alors, les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(v_i)_{i\in I}$ *est linéairement indépendante.*

(ii) *Tout vecteur $v \in \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$ s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire de $(v_i)_{i\in I}$.*

DÉMONSTRATION. (i)⇒(ii) : On considère deux combinaisons linéaires (finies)

$$v = \sum_{i\in I_1} \alpha_i v_i = \sum_{i\in I_2} \beta_i v_i.$$

Alors

$$0 = v - v = \sum_{i\in I_1} \alpha_i v_i - \sum_{i\in I_2} \beta_i v_i = \sum_{i\in I_1\cup I_2} (\alpha_i - \beta_i) v_i,$$

où $\alpha_i := 0$ si $i \in I_2 \setminus I_1$ et $\beta_i := 0$ si $i \in I_1 \setminus I_2$. Comme $(v_i)_{i\in I}$ est libre, on obtient $\alpha_i - \beta_i = 0$ pour tout i et, ainsi, les deux combinaisons sont les mêmes.
(ii)⇒(i) se montre en choisissant $v = 0$. ■

Le lemme suivant donne une variation de la définition d'indépendance linéaire. Cette variation est peut être plus intiutive mais, d'autre coté, elle est moins pratique.

Lemme 4.13 *Soit V un K-espace vectoriel. Alors une famille de vecteurs de V est linéairement dépendante si et seulement si au moins un vecteur de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{v_i\}_{i\in I}$ une famille linéairement dépendante. Alors il existe une partie finie $I_0 \subset I$ et des coefficients $\alpha_i \in K$, $i \in I_0$, tels que $\sum_{i\in I_0} \alpha_i v_i = 0$, où $\alpha_j \neq 0$ pour au moins un indice $j \in I_0$. Ceci permet d'écrire

$$v_j = -\sum_{i\in I_0\setminus\{j\}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i.$$

Réciproquement : Si un vecteur est une combinaison linéaire des autres, il existe $j \in I$, une partie finie $I_1 \subset I \setminus \{j\}$, et des coefficients $\beta_i \in K$ ($i \in I_1$) tels que $v_j = \sum_{i\in I_1} \beta_i v_i$. Alors $1 \cdot v_j - \sum_{i\in I_1} \beta_i v_i = 0$, c-à-d $\{v_i\}_{i\in I}$ est linéairement dépendante. ■

La définition suivante introduit le concept le plus fondamental des espaces vectoriels.

Définition 4.14 *Une famille $\mathscr{B} = (v_i)_{i\in I}$ d'un K-espace vectoriel V s'appelle une* ***base*** *[basis] de V si*

(i) *$\mathscr{B}$ est une famille genératrice de V, et*

(ii) *$\mathscr{B}$ est linéairement indépendante.*

Exemples des bases

Vecteurs colonnes. Soit e_i la i-ième colonne de I_n. Alors, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de K^n. On dit que c'est la **base canonique** [canonical basis] de K^n.
Plus généralement les colonnes d'une matrice inversible quelconque forment une base de K^n.

Polynômes. Les monômes $1, t, t^2, \ldots, t^n$ forment une base de $K_n[t]$, le K-espace vectoriel de polynômes de degré $\leq n$.

La base la plus petite. Si V ne contient que le vecteur nul, $\mathscr{B} = \emptyset$ est la base (unique).

Construction des bases

Dans ce qui suit, on ne considère que des familles *finies*. Plus tard, dans la section 4.3.1, on traitera le cas infini.

Lemme 4.15 *Étant donné un K-espace vectoriel V, soient $v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_s \in V$ tels que $v_1,\dots,v_r$ sont linéairement indépendants et $\mathsf{span}(v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_s) = V$. Alors, on peut former une base de V en ajoutant certains vecteurs parmi $w_1,\dots,w_s$ à $v_1,\dots,v_r$.*

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur s. Si $s = 0$, $(v_1,\dots,v_r)$ est déjà une base de V par hypothèse. On suppose que l'assertion est vraie pour $s-1 \geq 0$ et r quelconque. Alors on doit démontrer l'assertion pour s. Si $(v_1,\dots,v_r)$ est une base, la preuve est finie. Sinon on a $\mathsf{span}(v_1,\dots,v_r) \neq V$. Alors il existe $w_j \neq 0$, $1 \leq j \leq s$ tel que $w_j \notin \mathsf{span}(v_1,\dots,v_r)$. En particulier, l'équation

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \beta w_j = 0,$$

implique $\beta = 0$ et, par l'indépendance linéaire de $v_1,\dots,v_r$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Alors, $(v_1,\dots,v_r,w_j)$ est linéairement indépendante. Par l'hypothèse de récurrence, on obtient une base en ajoutant certains vecteurs parmi $w_1,\dots,w_{j-1},w_{j+1},\dots,w_s$ (une famille de $s-1$ vecteurs) à $v_1,\dots,v_r,w_j$. Cela démontre l'assertion pour s. ■

Corollaire 4.16 *Soit $A_1 \in K^{m\times r}$ de rang r. Alors, il existe $A_2 \in K^{m\times(m-r)}$ telle que $A = \begin{pmatrix} A_1 & \big| & A_2 \end{pmatrix}$ est inversible.*

DÉMONSTRATION. Exercice. ■

On va démontrer que toute base d'un espace vectoriel comporte le même nombre de vecteurs. Le lemme et le théoreme suivant joueront un rôle important dans la preuve.

Lemme 4.17 *Soit V un K-espace vectoriel et $w_1,\dots,w_n \in V$. Soit $v \in \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n)$, on écrit $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$. S'il existe un $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\alpha_k \neq 0$, alors*

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(w_1,\dots,w_{k-1},v,w_{k+1},\dots,w_n). \tag{4.2}$$

DÉMONSTRATION. Quitte à renuméroter les vecteurs w_i on peut supposer $k = 1$. On a alors

$$w_1 = \frac{1}{\alpha_1} v - \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} w_i$$

Soit $w \in \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n)$, ainsi il existe $\beta_1,\dots,\beta_n \in K$ tels que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i = \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \sum_{i=2}^{n} \Big(\beta_i - \frac{\beta_1 \alpha_i}{\alpha_1}\Big) w_i.$$

Alors, $w \in \mathsf{span}(v,w_2,\dots,w_n)$. Comme w est arbitraire, on obtient

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) \subseteq \mathsf{span}(v,w_2,\dots,w_n).$$

L'inclusion $\mathsf{span}(v,w_2,\dots,w_n) \subseteq \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n)$ est trivialement vraie et le lemme est donc démontré. ■

Théorème 4.18 (Lemme de Steinitz) *Soit V un K-espace vectoriel et soit $v_1,\dots,v_m \in V$ une famille linéairement indépendante et $w_1,\dots,w_n \in V$. On suppose que*

$$\mathsf{span}(v_1,\dots,v_m) \subset \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n). \tag{4.3}$$

Alors :

(i) $m \leq n$

(ii) on peut remplacer m vecteurs parmi $w_1,\dots,w_n$ par $v_1,\dots,v_m$ sans changer l'espace engendré.

Avant de démontrer le théorème 4.18, une explication de l'assertion du deuxième point : Il existe des indices $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}$ tels que l'on peut remplacer w_{i_1} par v_1, w_{i_2} par v_2, ..., w_{i_m} par v_m, sans changer l'espace engendré par $w_1,\dots,w_n$. Quitte à renuméroter on peut supposer que $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_m = m$, donc

$$\mathsf{span}(v_1,\dots,v_m,w_{m+1},\dots,w_n) = \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n). \tag{4.4}$$

DÉMONSTRATION. Grâce à (4.3) on peut écrire $v_1 = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$. Comme $v_1 \neq 0$ (par l'indépendance de $v_1,\dots,v_n$), il existe $i_1 \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\alpha_{i_1} \neq 0$. En utilisant le lemme 4.17 on obtient

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(w_1,\dots,w_{i_1-1},v_1,w_{i_1+1},\dots,w_n).$$

Ou, quitte à renuméroter,

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(v_1,w_2,\dots,w_n).$$

On répète ce procédé comme suit. Par récurrence on suppose que les vecteurs $w_1,\dots,w_r$, où $1 \leq r \leq m-1$, sont déjà remplacés par $v_1,\dots,v_r$:

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(v_1,\dots,v_r,w_{r+1},\dots,w_n).$$

Évidemment $r \leq n$. Grâce à (4.3) il existe $\beta_1,\dots,\beta_n \in K$ tels que

$$v_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i + \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i w_i.$$

Comme $v_{r+1} \notin \mathsf{span}(v_1,\dots,v_r)$ (par l'indépendance de $v_1,\dots,v_n$, voir le lemme 4.13), il existe $i_{r+1} \in \{r+1,\dots,n\}$ tel que $\beta_{i_{r+1}} \neq 0$. En particulier, $r+1 \leq n$. Encore quitte à renuméroter on suppose que $i_{r+1} = r+1$. En utilisant le lemme 4.17 on obtient

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(v_1,\dots,v_{r+1},w_{r+2},\dots,w_n).$$

En répétant ce procédé jusqu'à $r = m-1$, ça donne $m \leq n$ et (4.4). ■

Corollaire 4.19 *Soit V un K-espace vectoriel. Alors :*

(i) si V a une base finie, tout autre base est aussi finie,

(ii) deux bases finies de V ont le même nombre d'éléments.

DÉMONSTRATION. (i). Soit $v_1,\dots,v_n$ une base (finie) de V. On suppose qu'il existe une base infinie de V. Alors il existe $n+1$ vecteurs $w_1,\dots,w_{n+1} \in V$ qui sont linéairement indépendants. Mais alors

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_{n+1}) \subseteq \mathsf{span}(v_1,\dots,v_n) = V,$$

ce qui contredit le théorème 4.18.

(ii). Soient $\{v_1,\dots,v_m\}$ et $\{w_1,\dots,w_n\}$ deux bases de V. Par le théorème 4.18, on a $m \leq n$ et (en echangeant les rôles de v et w) $n \leq m$. Donc $m = n$. ■

Du théorème 4.18 découle également l'assertion suivante : si V a une base infinie, V ne peut pas avoir de bas finie. Par exemple, l'espace vectoriel des suites n'admet pas de base finie.

Le résultat du corollaire 4.19 permet la définition suivante.

Définition 4.20 *Soit V un K-espace vectoriel. On définit la* ***dimension*** *de V par*

$$\dim(V) := \begin{cases} n, & \text{si } V \text{ a une base de } n < \infty \text{ vecteurs,} \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\dim(V) < \infty$ on dit que V est de dimension finie, sinon on dit que V est de dimension infinie.

Exemples :

- K^n est un K-espace vectoriel de dimension n.
- $K_n[t]$ est un K-espace vectoriel de dimension $n+1$.
- $\{0\}$ est un K-espace vectoriel de dimension 0.
- Dans l'espace vectoriel des suites on trouve une infinité de vecteurs linéairement indépendants : $(1,0,0,\dots)$, $(0,1,0,\dots)$, $\dots$. Alors, il est de dimension infinie.
- L'espace vectoriel $M_{m\times n}(K)$ (muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire) est de dimension mn. Si $m = n$, l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$. Démonstration: Voir exercices.

Finalement, les deux résultats suivants apportent une compréhension additionnelle de la notion de dimension.

Lemme 4.21 *Soit V un K-espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de V. Si cette famille est libre alors $p \leq n$.*

DÉMONSTRATION. Si $p > n$, par le lemme 4.15, on peut ajouter $(v_1,\dots,v_p)$ à une base de plus de n vecteurs. Mais, cela contredit le résultat du corollaire 4.19. ■

Lemme 4.22 *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors :*

(i) $\dim(W) \leq \dim(V)$*,*

(ii) si $\dim(W) = \dim(V)$ *alors* $W = V$*.*

DÉMONSTRATION. (i). Par le lemme 4.21, W est de dimension finie car toute famille libre de W est aussi une famille libre de V. Soit $\{w_1,\dots,w_r\}$ une base de W. Par le lemme de Steinitz (Théorème 4.18) on peut construire une base de V en ajoutant des vecteurs à $\{w_1,\dots,w_r\}$. Alors $\dim(W) \leq \dim(V)$.

(ii). Soit $n = \dim(W) = \dim(V)$ et $w_1,\dots,w_n$ une base de W. On suppose que $V \neq W$. Alors il existe $v \in V$ tel que $v \notin \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n)$. En particulier, $(w_1,\dots,w_n,v)$ est une famille libre. Mais cela contredit le résultat du lemme 4.21. ■

4.3.1 Le cas de dimension infinie

La procédé du lemme de Steinitz est restreint à la dimension finie. Dans le cas de dimension infinie la construction d'une base n'est pas facile du tout. Par exemple, on considère l'espace vectoriel des suites : les suites $(1,0,0,\dots)$, $(0,1,0,\dots)$, $\dots$ sont linéairement indépendantes mais elles ne forment pas une base ! Dans le cas infini la démonstration de l'existence d'une base n'est pas constructive et elle recourt aux concepts de la théorie des ensembles.

Définition 4.23 *Soit E un ensemble. Une* ***relation d'ordre*** [partial order] *sur E est une relation binaire R satisfaisant :*

(i) xRx pour tout $x \in E$,

(ii) (xRy et yRx) $\Rightarrow$ $x = y$,

(iii) $(xRy$ *et* $yRz) \Rightarrow xRz$.

Exemples typiques :

- la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$,
- la relation $\subseteq$ sur $P(M)$, l'ensemble des parties d'un ensemble M.

Définition 4.24 *Soit* $\leq$ *une relation d'ordre sur* X. *Un ensemble non vide* $A \subseteq X$ *est* ***totalement ordonné*** *[totally ordered] si deux éléments quelconques* $x,y \in E$ *sont toujours comparables, c-à-d on a toujours* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre habituelle est totalement ordonné. Au contraire $P(M)$ muni de la relation d'ordre $\subset$ n'est pas totalement ordonné. Mais un sous-ensemble $A = \{E_1, E_2, E_3, \dots\} \subset P(E)$, où $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$, est totalement ordonné.

Définition 4.25 *Soit* $\leq$ *une relation d'ordre sur* X *et* $A \subseteq X$ *avec* $A \neq \emptyset$. *Alors*

- $s(A) \in X$ *est un* ***majorant*** *de* A *si* $a \leq s(A)$ *pour tout* $a \in A$.
- $m(A) \in A$ *est un* ***élement maximal*** *de* A, *si l'implication* $m(A) \leq a \Rightarrow m(A) = a$ *et vraie pour tout* $a \in A$.
- X *est appelé* ***ensemble inductif*** *si tout sous-ensemble totalement ordonné possède un majorant.*

Lemme 4.26 (Lemme de Zorn ou lemme de Kuratowski-Zorn) *Tout ensemble inductif admet (au moins) un élément maximal.*

La preuve du lemme de Zorn utilise l'axiome du choix. En fait, l'axiome du choix et le lemme de Zorn sont équivalents.

Enfin, soit V un K-espace vectoriel ! On considère la collection de tous les ensembles linéairement indépendants :

$$X := \{E \subseteq V : \text{ les éléments de } E \text{ sont linéairement indépendants}\}. \tag{4.5}$$

Comme $\{\emptyset\} \in X$, l'ensemble X est non vide. Le lemme suivant montre que l'on peut appliquer le lemme de Zorn pour X.

Lemma 4.27 *L'ensemble* X *défini par* (4.5) *est inductif par rapport à la relation d'ordre* $\subseteq$.

DÉMONSTRATION. Soit $A \subset X$ un ensemble totalement ordonné dans lequel tout élément est un sous-ensemble (de V) qui est linéairement indépendant. En définissant

$$\overline{A} = \bigcup_{E \in A} E,$$

il est évident que $\overline{A}$ est un majorant de $P(A)$. Il reste à montrer que $\overline{A} \in X$, c-à-d que les éléments de $\overline{A}$ sont linéairement indépendants.

À cette fin on choisit une famille quelconque de vecteurs

$$v_1, \dots, v_n \in \overline{A}.$$

Par récurrence sur n on montre qu'il existe un ensemble $E_n \in A$ tel que $v_1, \dots, v_n \in E_n$. Pour $n = 1$ ceci découle de la définition de $\overline{A}$. Supposons l'assertion vraie pour $n-1$, alors il existe $E_{n-1} \in A$ tel que $v_1, \dots, v_{n-1} \in E_{n-1}$. Par la définition de $\overline{A}$, il existe $E' \in A$ tel que $v_n \in E'$. Comme A est totalement ordonné on a $E_{n-1} \subseteq E'$ ou $E' \subseteq E_{n-1}$. Dans le premiér cas l'assertion devient vraie pour n en posant $E_n = E'$, dans le deuxième en posant $E_n = E_{n-1}$. Comme E_n est linéairement indépendant, la famille $v_1, \dots, v_n$ est aussi linéairement indépendante. Alors, $\overline{A} \in X$ est un majorant de A. ∎

L'application du lemme de Zorn sur X établit l'existence d'un *sous-ensemble linéairement indépendant maximal* de V. Le théoreme suivant montre que c'est en fait une base. On dit qu'un ensemble générateur $\mathscr{B} \subset V$ est **minimal** s'il n'existe pas un ensemble générateur A tel que $A \subsetneq \mathscr{B}$.

Théorème 4.28 *Soit V un K-espace vectoriel et $\mathscr{B} \subset V$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\mathscr{B}$ est une base.

(ii) $\mathscr{B}$ est un ensemble générateur minimal.

(iii) $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant maximal.

DÉMONSTRATION. $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $\mathscr{B}$ une base et $A \subsetneq \mathscr{B}$. Par l'indépendance linéaire de $\mathscr{B}$ un vecteur $v \in \mathscr{B} \setminus A$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de A (voir le lemme 4.13). En particulier, A n'engendre pas V et ainsi $\mathscr{B}$ est un ensemble générateur minimal.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $\mathscr{B}$ un ensemble générateur minimal. Supposons que $\mathscr{B}$ soit linéairement dépendant. Par le lemme 4.13 il existe $v \in \mathscr{B}$ qui peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B} \setminus \{v\}$. Alors $\mathscr{B} \setminus \{v\}$ engendre V, ce qui contredit la minimalité de $\mathscr{B}$. Ainsi $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant. Il est aussi maximal : Soit $\mathscr{B}' \supseteq \mathscr{B}$ linéairement indépendant. Comme $\mathscr{B}$ est un ensemble générateur, on peut écrire tout élément de V comme une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$. Alors $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $\mathscr{B}$ linéairement indépendant maximal. Il reste à montrer que V est engendré par $\mathscr{B}$. Trivialement, on a $v \in \mathsf{span}(\mathscr{B})$ pour tout $v \in \mathscr{B}$. Ainsi, soit $v \notin \mathscr{B}$. Par la maximalité de $\mathscr{B}$, l'ensemble $\mathscr{B} \cup \{v\}$ ne peut pas être linéairement indépendant. Alors il existe une combinaison linéaire

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \quad v_1, \dots, v_n \in \mathscr{B},$$

où au moins un des coefficients $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ est non nul. Si $\alpha = 0$, alors $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement depéndants ce qui contredit l'indépendance de $\mathscr{B}$. Alors on a $\alpha \neq 0$ et ainsi le vecteur v est une combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$:

$$v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} v_i.$$

Cela montre que $\mathscr{B}$ engendre V. ∎

Corollaire 4.29 *Tout espace vectoriel possède une base.*

4.4 Sommes d'espaces vectoriels

Définition 4.30 *Soient $U_1, \dots, U_s$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Leur* ***somme*** *est définie par*

$$U_1 + \cdots + U_s := \{u_1 + \cdots + u_s : u_1 \in U_1, \dots, u_s \in U_s\}.$$

Exemple 4.31 Soit $V = \mathbb{R}^3$ et $U = \mathsf{span}(u)$, $W = \mathsf{span}(w)$, où $u \neq 0$, $w \neq 0$. Les sous-espaces U, W correspondent aux droites dans $\mathbb{R}^3$. Si u et w sont linéairement indépendants (c-á-d il n'existe pas un scalaire λ tel que $u = \lambda w$), la somme $U + W$ correspond à un plan. ♦

Lemme 4.32 *Soient $U_1,\dots,U_s$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors*

(i) $U_1+\cdots+U_s$ *est encore un sous-espace vectoriel de V,*

(ii) $U_1+\cdots+U_s = \mathsf{span}(U_1\cup\cdots\cup U_s)$,

(iii) $\dim(U_1+\cdots+U_s)\le \dim(U_1)+\cdots+\dim(U_s)$.

DÉMONSTRATION. Exercice. ■

Voici un exemple simple montrant que l'inégalité du lemme 4.32 (iii) peut être stricte : La somme d'un espace vectoriel $U\neq\{0\}$ avec lui-même donne $U+U=U$, alors $\dim(U)=\dim(U+U)<\dim(U)+\dim(U)$. Le théorème suivant explique la différence entre les deux côtés de l'inégalité pour $s=2$. On rappelle que l'intersection de deux sous-espace vectoriels est encore un sous-espace vectoriel, voir le lemme 4.8.

Théorème 4.33 (Formule de Grassmann) *Soient U,W deux sous-espaces vectoriels (de dimension finie) d'un K-espace vectoriel V. Alors*

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W). \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION. Si $U\cap W=\{0\}$ on prend une base $(u_1,\dots,u_m)$ de U et une base $(w_1,\dots,w_n)$ de W. Alors, $(u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n)$ est une base de $U+W$ et la formule (4.6) est vraie.

Supposons $U\cap W\neq\{0\}$, soit $v_1,\dots,v_r$ une base de $U\cap W$. Par le lemme 4.15 on peut la compléter en une base $v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{\tilde m}$ de U et en une base $v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_{\tilde n}$ de W. Pour montrer (4.6), on va montrer que

$$v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{\tilde m},w_1,\dots,w_{\tilde n} \tag{4.7}$$

est une base de $U+W$. Par la construction,

$$\mathsf{span}(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{\tilde m},w_1,\dots,w_{\tilde n})=\mathsf{span}(U\cup W)=U+W,$$

et ainsi il reste à montrer leur indépendance linéaire. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in K$, $\beta_1,\dots,\beta_{\tilde m}\in K$, $\gamma_1,\dots,\gamma_{\tilde n}\in K$, tels que

$$0=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i+\sum_{i=1}^{\tilde m}\beta_i u_i+\sum_{i=1}^{\tilde n}\gamma_i w_i, \tag{4.8}$$

ainsi

$$v:=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i+\sum_{i=1}^{\tilde m}\beta_i u_i=-\sum_{i=1}^{\tilde n}\gamma_i w_i. \tag{4.9}$$

La première équation donne que $v\in U$ et la seconde que $v\in W$, alors $v\in U\cap W$. En particulier on peut écrire v comme une combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_r$. Mais (4.9) est aussi une combinaison linéaire et, par l'indépendance de $v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{\tilde m}$, on obtient que $\beta_1=\cdots=\beta_{\tilde m}=0$. En les substituant dans (4.8) on obtient, par l'indépendance de $v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_{\tilde n}$, que $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=\gamma_1=\cdots=\gamma_{\tilde n}=0$. Alors, (4.7) est une base de $U+W$. ■

Le terme de correction $\dim(U\cap W)$ dans (4.6) disparait si et seulement si $U\cap W=\{0\}$. Le lemme suivant donne une autre condition équivalente.

Lemme 4.34 *Soient U,W deux sous-espace vectoriels (de dimension finie) d'un K-espace vectoriel V tels que $U+W=V$. Alors $U\cap W=\{0\}$ si et seulement si tout $v\in V$ s'écrit de façon unique $v=u+w$ avec $u\in U$, $w\in W$.*

DÉMONSTRATION. Soit $U \cap W = \{0\}$. Supposons qu'un vecteur $v \in V$ admette deux décompositions $v = u + w = u' + w'$, où $u,u' \in U$ et $w,w' \in W$. Alors

$$\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w - w'}_{\in W} \in U \cap W = \{0\},$$

ce qui donne $u = u'$ et $w = w'$.

Réciproquement, soit $u \in U \cap W$. Alors $0 = 0 + 0$ et $0 = u + (-u)$ sont deux décompositions de 0. Comme la décomposition est unique on obtient $u = 0$. ■

Définition 4.35 *Soit V un K-espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. On dit que V est la* ***somme directe*** *[direct sum] de U_1 et U_2, noté $V = U_1 \oplus U_2$, si $V = U_1 + U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.*

Tout sous-espace peut se compléter en tout l'espace par une somme directe (en dimension finie).

Théorème 4.36 *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et U un sous-espace vectoriel de V. Alors il existe un sous-espace vectoriel U' tel que $V = U \oplus U'$.*

DÉMONSTRATION. Soit $v_1,\dots,v_r$ une base U. Par le lemme 4.15 il existe $v_{r+1},\dots,v_n \in V$ tels que $v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_n$ est une base de V. En définissant $U' = \mathsf{span}(v_{r+1},\dots,v_n)$ on obtient $V = U + U'$ et $U \cap U' = \{0\}$. ■

On conclut ce chapitre par l'extension à plus de deux sous-espaces.

Définition 4.37 *Soient $U_1,\dots,U_r$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. On dit que V est la* ***somme directe*** *de $U_1,\dots,U_r$ si $V = U_1 + \cdots + U_r$ et*

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_r) = \{0\} \tag{4.10}$$

pour $i = 1,\dots,r$.

On ne peut pas remplacer la condition (4.37) par la condition $U_i \cap U_j = \{0\}$ pour $i,j = 1,\dots,r$. Par exemple, $V = \mathbb{R}^2$ n'est pas une somme directe des sous-espaces

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in K \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K \right\}, \quad U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K \right\}.$$

Théorème 4.38 *Soient $U_1,\dots,U_r$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$.

(ii) *Tout $v \in V$ s'écrit de façon unique $v = u_1 + \cdots + u_r$ avec $u_i \in U_i$, $i = 1,\dots,r$.*

(iii) *Si $v_{i,1},\dots,v_{i,n_i}$ sont des bases de U_i, $i = 1,\dots,r$, alors*

$$\mathscr{B} = \left(v_{1,1},\dots,v_{1,n_1},\, v_{2,1},\dots,v_{2,n_2}, \quad \dots, \quad v_{r,1},\dots,v_{r,n_r}\right)$$

est une base de V.

(iv) $V = U_1 + \cdots + U_r$ *et* $\dim(V) = \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_r)$.

DÉMONSTRATION. (i) ⇒ (ii). Supposons que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ et que $v \in V$ s'écrive

$$v = u_1 + \cdots + u_r = w_1 + \cdots + w_r, \qquad u_i,w_i \in U_i,\ i = 1,\dots,r.$$

Alors

$$\underbrace{-(u_i - w_i)}_{\in U_i} = \underbrace{u_1 - w_1 + \cdots + u_{i-1} - w_{i-1} + u_{i+1} - w_{i+1} + \cdots + u_r - w_r}_{\in (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_r)}.$$

Par la définition (4.10) on obtient $u_i - w_i = 0$ et ainsi $u_i = w_i$ pour $i = 1, \dots, r$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Tout $v \in V$ s'écrit comme une somme d'éléments de U_i, alors la famille $\mathscr{B}$ engendre V. Pour montrer l'indépendance linéaire, soit

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_{ij}, \qquad \alpha_{ij} \in K.$$

En définissant $w_i := \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_{ij} \in U_i$, l'unicité de la décomposition $0 = 0 + \cdots + 0$ donne $w_i = 0$. Par l'indépendance linéaire de $v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}$, on obtient que tous les coefficients α_{ij} sont nuls.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $v \in U_k \cap (U_1 + \cdots + U_{k-1} + U_{k+1} + \cdots + U_r)$. Alors il existe $\alpha_{ij} \in K$ tels que

$$v = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{kj} v_{kj} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_{ij}.$$

Par le lemme 4.12, v s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$. Ceci montre que $\alpha_{ij} = 0$ et ainsi $v = 0$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) suit directement des définitions. ■