Chapitre 3

Réduction de matrices : forme échelonnée

Pour ce chapitre, $(K,+,\cdot)$ sera au moins un anneau commutatif. En fait, pour trouver la forme échelonnée et donner une définition univoque du rang il sera nécessaire de supposer que $(K,+,\cdot)$ soit un corps (par exemple, $K=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$ ou $K=\mathbb{F}_2$).

C'est une idée constante en algèbre linéaire de réduire une matrice $A\in M_{m\times n}(K)$ en une forme plus simple (par exemple, diagonale ou triangulaire). Une telle réduction peut simplifier considérablement l'analyse d'un problème comme la résolution d'un système d'équations. Dans ce chapitre, nous allons voir comment on transforme une matrice en une matrice échelonnée (par la méthode de Gauss).

3.1 Matrices élémentaires

Soit $(K,+,\cdot)$ un anneau commutatif. Trois types de transformations sont utilisés pour la réduction d'une matrice sous forme échelonnée.

Type I : les matrices de permutation P_{ij}. On rappelle (voir section 2.1.1) que $(S_n,\circ)$ désigne le groupe des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$. Soit $e_i\in K^n$ le i-ième **vecteur unité** [*unit vector*] défini par

$$e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ième ligne.}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Définition 3.1 *Pour une permutation $\sigma\in S_n$ on appelle la matrice $P_\sigma\in M_{n\times n}(K)$ définie par*

$$P_\sigma=\begin{pmatrix}e_{\sigma(1)}^{\mathsf{T}}\\ e_{\sigma(2)}^{\mathsf{T}}\\ \vdots\\ e_{\sigma(n)}^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}$$

*une **matrice de permutation**.*

Exemple 3.2 La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donne la matrice

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♦

MATLAB

Des matrices de permutation sous MATLAB:

```
>> sigma = [ 1 4 2 3 ];
>> P = eye(4); P = P(sigma,:)
P =
   1   0   0   0
   0   0   0   1
   0   1   0   0
   0   0   1   0
```

Lemme 3.3 *Une matrice $P \in M_{n\times n}(K)$ est une matrice de permutation si et seulement si elle possède dans chaque ligne et chaque colonne exactement un élément égal à* 1 *et les autres égaux à* 0.

DÉMONSTRATION. On remarque d'abord qu'une matrice de permutation $P = P_\sigma$ ne possède que des 1 et des zéros comme éléments. En outre, par définition 3.1, chaque ligne de P_σ a la propriété desirée. S'il existe une colonne de P_σ avec plusieurs 1, alors il existe $i \neq j$ avec $\sigma(i) = \sigma(j)$ et par suite σ ne peut pas être une permutation. Par le principe des tiroirs, il n'existe pas une colonne avec que des zéros. Ceci montre la nécéssité de la condition du lemme.

Pour montrer la suffisance, soit P une matrice possédant exactement un élément égal à 1 dans chaque ligne et chaque colonne et tous les autres éléments égaux à zéro. On définit l'application

$$\sigma(\text{indice de la ligne contenant un } 1) = \text{indice de colonne de l'élément } 1.$$

C'est bien une permutation et donc $P = P_\sigma$ est une matrice de permutation. ■

Le produit d'un vecteur $v \in K^n$ par P_σ permute les éléments de v selon σ :

$$P_\sigma v = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)}^{\mathsf T} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)}^{\mathsf T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \\ v_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ v_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Donc, en posant $\tilde v := P_\sigma v$ on obtient $\tilde v_i = v_{\sigma(i)}$, $i = 1,\dots,n$.

Soit P_π une (autre) matrice de permutation. Alors,

$$P_\pi P_\sigma v = P_\pi \tilde v = \begin{pmatrix} \tilde v_{\pi(1)} \\ \tilde v_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \tilde v_{\pi(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\sigma(\pi(1))} \\ v_{\sigma(\pi(2))} \\ \vdots \\ v_{\sigma(\pi(n))} \end{pmatrix} = P_{\sigma\circ\pi} v.$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $v \in K^n$ on obtient

$$P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\circ\pi} \tag{3.1}$$

Attention au renversement de l'ordre de σ et π !

En posant $\pi = \sigma^{-1}$, l'inverse de σ, dans (3.1) on obtient

$$\sigma^{-1}\circ\sigma = \mathsf{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{-1}\circ\sigma} = P_{\mathsf{id}} = I_n$$

On montre que $P_{\sigma^{-1}}P_\sigma = I_n$ en échangeant les rôles de σ et σ^{-1}.

On a d'autre part

$$P_\sigma P_\sigma^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)}^\mathsf{T} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)}^\mathsf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)}^\mathsf{T} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(1)}^\mathsf{T} e_{\sigma(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{\sigma(n)}^\mathsf{T} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)}^\mathsf{T} e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = I_n.$$

Alors,

$$P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^T. \tag{3.2}$$

Lemme 3.4 *L'ensemble des matrices de permutations muni du produit matriciel est un sous-groupe de $GL_n(K)$.*

DÉMONSTRATION. 1) L'ensemble est non-vide car I_n est une matrice de permutation. 2) La stabilité découle de (3.1). 3) Par (3.2) l'inverse d'une matrice de permutation est encore une matrice de permutation. ■

Définition 3.5 *Une* ***transposition*** *$\sigma \in S_n$ est une permutation qui échange exactement deux éléments:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad 1 \le i < j \le n.$$

La matrice de permutation correspondante est notée P_{ij}.

Plus tard, on démontrera que toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme composition d'au plus $n-1$ transpositions.

La multiplication à droite par P_{ij} échange les colonnes i et j d'une matrice. La multiplication à gauche par P_{ij} échange les lignes i et j.

Exemple 3.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_{13}A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad AP_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

♦

Comme $P_{ij} \cdot P_{ij} = I_n$ on a que $P_{ij} = P_{ij}^{-1} = P_{ij}^\mathsf{T}$, donc la matric P_{ij} est symétrique.

Type II : les matrices diagonales $M_i(\lambda)$. Pour $\lambda \in K$ on définit la matrice $M_i(\lambda)$ par

$$M_i(\lambda) = \mathrm{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1 \text{ fois}},\lambda,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-i \text{ fois}})$$

La multiplication à gauche d'une matrice $A \in M_{n\times p}(K)$ par une matrice $M_i(\lambda)$ multiplie la ligne i de A par λ et laisse les autres lignes inchangées. (La multiplication à droite multiplie la colonne i par λ.)

Exemple 3.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_2(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

♦

On voit facilement que $M_i(\lambda)$ est inversible si λ est inversible et que l'inverse est donné par

$$M_i(\lambda)^{-1} = M_i(\lambda^{-1}).$$

Type III : $G_{ij}(\lambda)$. Soit $n \geq 2$, $\lambda \in K$ et $1 \leq i < j \leq n$. On définit alors la matrice

$$G_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda e_j e_i^\mathsf{T} = \begin{array}{c} \\ j \rightarrow \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad i \\ \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{n \times n}(K).$$

La multiplication de $G_{ij}(\lambda)$ et $A \in M_{n\times p}(K)$:

$$G_{ij}(\lambda)A = (I_n + \lambda e_j e_i^\mathsf{T})A = A + \lambda e_j e_i^\mathsf{T} A = A + \begin{array}{c} \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ip} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $G_{ij}(\lambda)A$ additionne λ fois la ligne i de la matrice A à la ligne j de cette même matrice et laisse les autres lignes inchangées. De façon analogue on voit que $G_{ij}(\lambda)^\mathsf{T} A$ additionne λ fois la ligne j à la ligne i :

$$G_{ij}(\lambda)^\mathsf{T} A = (I_n + \lambda e_i e_j^\mathsf{T})A = A + \lambda e_i e_j^\mathsf{T} A.$$

Exemple 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{13}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, G_{13}(-2)^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} -13 & -14 & -15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

♦

Lemma 3.9 $G_{ij}(\lambda)^{-1} = G_{ij}(-\lambda)$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} G_{ij}(\lambda)G_{ij}(-\lambda) &= (I_n + \lambda e_j e_i^\mathsf{T})(I_n - \lambda e_j e_i^\mathsf{T}) \\ &= I_n + \lambda e_j e_i^\mathsf{T} - \lambda e_j e_i^\mathsf{T} - \lambda^2 e_j \underbrace{e_i^\mathsf{T} e_j}_{=0} e_i^\mathsf{T} = I_n. \end{aligned}$$

De même $G_{ij}(-\lambda)G_{ij}(\lambda) = I_n$. ■

3.2 Reduction à la forme échelonnée

Soit $(K, +, \cdot)$ un corps et soit $A \in M_{m\times n}(K)$. On veut construire une matrice inversible $B \in M_{m\times m}(K)$ telle que BA est la plus « simple » possible. La construction est basée sur l'élimination de Gauss, que nous avons déjà utilisée dans le chapitre 0 afin de résoudre un système à trois inconnus. On va exprimer les transformations effectuées par l'élimination de Gauss comme des multiplications à gauche par des matrices élémentaires :

Type I. P_{ij} – Échange des lignes i et j.

Type II. $M_i(\lambda)$ – Multiplication de la ligne i par λ.

Type III. $G_{ij}(\lambda)$ – Ajout de la ligne i multipliée par λ à la ligne j.

On construira la matrice B comme produit des matrices élémentaires.

Définition 3.10 *Une matrice $C \in M_{m\times n}(K)$ est dite **échelonnée** [(row) echelon form] si elle est de la forme*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & \begin{array}{c|c} 1 & \star \end{array} & \begin{array}{c|c} \star & \star \\ 1 & \star \end{array} & \begin{array}{c|c} \star & \star \\ \star & \star \\ 1 & \star \end{array} & & \begin{array}{c|c} \star & \star \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \star & \star \\ 1 & \star \end{array} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0
\end{array}\right), \tag{3.3}$$

où les étoiles $\star$ désignent des éléments quelconques.

Une définition plus formelle de (3.3) : Il existe des entiers $j_1,\dots,j_r \in \mathbb{N}$ tels que $1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$, $1 \le r \le \min\{m,n\}$ et

- $c_{ij} = 0$ si $0 < i \le m$ et $0 < j < j_1$;
- $c_{ij} = 0$ si $k < i \le m$ et $j_k \le j < j_{k+1}$, $k = 1,\dots,r$;
- $c_{kj_k} = 1$, $k = 1,\dots,r$.

Le premier coefficient non-nul sur une ligne non-nulle d'une matrice échelonnée est appelé un **pivot**. Ainsi, les éléments $c_{kj_k} = 1$, $k = 1,\dots,r$, sont les pivots de C. On remarque que les pivots peuvent parfois être des nombres quelconques non nuls.

Définition 3.11 *Une matrice $C \in M_{m\times n}(K)$ est dite **échelonnée réduite** [reduced (row) echelon form] si elle est échelonnée et si tous ses coefficients au-dessus des pivots sont nuls ($c_{ij_k} = 0$ si $1 \le i < k$, $k = 1,\dots,r$):*

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & \begin{array}{c|c} 1 & \star \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & \star \\ 1 & \star \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & \star \\ 0 & \star \\ 1 & \star \end{array} & & \begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \star \\ 1 & \star \end{array} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0
\end{array}\right).$$

Exemple 3.12 La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée (réduite) avec $r = 3$ et $j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 5$. ♦

Théorème 3.13 *Soit $(K,+,\cdot)$ un corps et soit $A \in M_{m\times n}(K)$. Alors il existe une matrice $B \in M_{m\times m}(K)$, produit des matrices élémentaires, telle que $C = BA$ soit échelonnée réduite. Pour $m = n$ on a que A est inversible si et seulement si $C = I_n$. Si A est inversible on a alors $A^{-1} = B$.*

DÉMONSTRATION. Si $A = 0$ alors en prenant $B = I_m$ le théorème est vrai. On suppose donc $A \ne 0$.

Étape 1. On note $A^{(0)} := A$. Soit j_1 l'indice de la première colonne de $A^{(1)}$ avec au moins un élément non nul. On note i_1 la ligne de premier élément non nul de la colonne j, ainsi $a^{(0)}_{i_1,j_1} \neq 0$ et

$$A^{(0)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j_1 & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i_1 \to \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ & & \\ 0 & a^{(0)}_{i_1,j_1} & \star \\ & & \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix} \end{array}.$$

On échange alors la ligne i_1 avec la ligne 1, puis on divise la ligne par $a^{(0)}_{i_1,j_1}$:

$$\tilde{A}^{(1)} := M_1\big(1/a^{(0)}_{i_1,j_1}\big)P_{1,i_1}A^{(0)} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \star \\ 0 & \tilde{a}^{(1)}_{2,j_1} & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}^{(1)}_{m,j_1} & \star \end{array}\right).$$

Finalement on élimine les termes dans la colonne j_1 en dessous de l'élément 1 en effectant

$$A^{(1)} := G_{1,m}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{m,j_1}\big)\cdots G_{1,2}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{2,j_1}\big)\tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \star \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \hat{A}^{(2)} \\ 0 & 0 & \end{array}\right). \tag{3.4}$$

En accumulant les matrices élémentaires utilisées,

$$B_1 = G_{1,m}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{m,j_1}\big)\cdots G_{1,2}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{2,j_1}\big)M_1\big(1/a^{(0)}_{i_1,j_1}\big)P_{1,i_1},$$

on obtient

$$A^{(1)} = B_1 A.$$

Si $\hat{A}^{(2)} = 0$, la sous-matrice de (3.4), le processus s'arrête, sinon on continue.

<u>Étape 2.</u> On applique le procédé de l'étape 1 à $\hat{A}^{(2)} \neq 0$. Soit $j_2 > j_1$ l'indice de la colonne de $A^{(1)}$ qui correspond à la première colonne non nulle de $\hat{A}^{(2)}$ et soit $i_2 \geq 2$ l'indice de ligne du premier élément non nul de cette colonne. Alors, $a^{(1)}_{i_2,j_2} \neq 0$ et on obtient

$$M_2\big(1/a^{(1)}_{i_2,j_2}\big)P_{2,i_2}A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & \star & \star & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ & & & \tilde{a}^{(2)}_{3,j_2} & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \star \\ & & & \tilde{a}^{(2)}_{m,j_2} & \end{array}\right).$$

On note que ces transformations ne modifient pas la première ligne de $A^{(1)}$. Comme auparavant les $m-2$ éléments potentiellement non nuls en dessous de 1 sont éliminés en définissant

$$B_2 = G_{1,m}\big(-\tilde{a}^{(2)}_{m,j_2}\big)\cdots G_{1,3}\big(-\tilde{a}^{(2)}_{3,j_2}\big)M_2\big(1/a^{(1)}_{i_2,j_2}\big)P_{2,i_2}.$$

On obtient

$$A^{(2)} := B_2 B_1 A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 1 & \star & \star & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{A}^{(3)} \end{array}\right).$$

Si $\hat{A}^{(3)} \neq 0$ on applique le même procédé à la matrice $\hat{A}^{(3)}$. Après au plus $r \leq \min\{m,n\}$ étapes le procédé s'arrête et l'on obtient la forme échelonnée

$$A^{(r)} := B_r \cdots B_2 B_1 A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc} 0 & 1 & \star & \star & \star & \star & \star & & \star & \star \\ & 0 & & 1 & \star & \star & \star & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & & \ddots & \star & \star \\ & & & & & & & & 1 & \star \\ & & & & & & & & 0 & \end{array}\right). \tag{3.5}$$

Les positions des pivots se trouvent aux lignes et colonnes données par

$$(1,j_1),\ (2,j_2),\ \ldots,\ (r,j_r). \tag{3.6}$$

Pour avoir une matrice échelonnée réduite, on doit encore éliminer les éléments au dessus des pivots. En définissant $C^{(r)} := A^{(r)}$ et de façon recursive

$$C^{(k-1)} := \tilde{B}_k C^{(k)} \quad \text{avec} \quad k = r, r-1, \ldots, 2,$$
$$\tilde{B}_k := \big(G_{1,k}(-c^{(k)}_{1,j_k})\big)^{\mathsf{T}} \big(G_{2,k}(-c^{(k)}_{2,j_k})\big)^{\mathsf{T}} \cdots \big(G_{k-1,k}(-c^{(k)}_{k-1,j_k})\big)^{\mathsf{T}},$$

on obtient alors que $C := C^{(1)}$ est échelonée réduite. Cela montre la première assertion du théorème avec la matrice inversible

$$B := \tilde{B}_2 \cdots \tilde{B}_r B_r \cdots B_1.$$

Pour montrer la deuxième assertion supposons que $m = n$. Si nous supposons que A est inversible alors $C = BA$ est inversible. Comme une matrice inversible ne peut pas avoir de ligne ou de colonne nulle on a forcément $C = I_n$. Réciproquement si $C = I_n$, comme $I_n = BA$ et que B est inversible on a $A = B^{-1} I_n = B^{-1}$ et donc A est inversible. ■

Exemple 3.14 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q}).$$

Selon la preuve ci-dessus on obtient

$$\begin{array}{lcccc}
B_1 : & \overset{M_1(1/2)}{\Rightarrow} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \overset{G_{12}(-2)}{\underset{G_{13}(-2)}{\Rightarrow}} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
B_2 : & \overset{M_2(-1)}{\Rightarrow} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \overset{G_{23}(1)}{\Rightarrow} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\check{B}_3 : & \overset{G_{23}(-2)^{\mathsf{T}}}{\underset{G_{13}(-3/2)^{\mathsf{T}}}{\Rightarrow}} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\
\check{B}_2 : & \overset{G_{12}(-1/2)^{\mathsf{T}}}{\Rightarrow} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C. & &
\end{array}$$

La matrice B est le produit de matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} B &= \check{B}_2 \check{B}_3 B_2 B_1 \\ &= G_{12}(-1/2)^{\mathsf{T}} G_{13}(-3/2)^{\mathsf{T}} G_{23}(-2)^{\mathsf{T}} G_{23}(1) M_2(-1) G_{13}(-2) G_{12}(-2) M_1(1/2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie que $BA = C$ est vrai. ♦

3.3 Matrices équivalentes

Tout d'abord on rappelle la notion de relation d'équivalence.

Définition 3.15 *Une **relation binaire** sur un ensemble E est un sous-ensemble R de $E \times E$. On note aussi xRy à la place de $(x,y) \in R$. Une relation binaire R est appelée une **relation d'équivalence** si elle est à la fois:*

- ***réflexive** : xRx pour tout $x \in E$*
- ***symétrique** : xRy implique yRx*
- ***transitive** : xRy et yRz impliquent xRz.*

Dans ce cas l'ensemble

$$[x] = \{y \in E \,|\, yRx\} \tag{3.7}$$

*est appelé la **classe d'équivalence** de x pour la relation R.*

La forme échelonée réduite est obtenue en multipliant une matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ par des matrices élémentaires à gauche. Si l'on effectue aussi des opérations sur les colonnes (c-à-d on multiplie par des matrices élémentaires à droite) on est amené à la définition suivante.

Définition 3.16 *Deux matrices $A, B \in M_{m\times n}(K)$ sont dites **équivalentes** s'il existe des matrices* inversible *$Q \in M_{m\times m}(K)$, $Z \in M_{n\times n}(K)$ telles que $A = QBZ$.*

On voit facilement que la « l'équivalence des matrices » est une relation d'équivalence sur $M_{m\times n}(K)$:

- réflexive : A est équivalente à elle-meme avec $Q = I_m$, $Z = I_n$.
- symétrique : $A = QBZ$ implique $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.
- transitive : $A = Q_1BZ_1$ et $B = Q_2CZ_2$ impliquent $A = (Q_1Q_2)C(Z_2Z_1)$.

La classe d'équivalence de A est :

$$[A] = \left\{QAZ : Q \in M_{m\times m}(K), Z \in M_{n\times n}(K) \text{ inversibles}\right\}.$$

Théorème 3.17 *Soit $(K,+,\cdot)$ un corps.*

(i) Soit $A \in M_{m\times n}(K)$. Alors A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où r est le nombre de pivots de la forme échelonnée réduite de A.

(ii) Deux matrices $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$ et $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$ sont équivalentes si et seulement si $r = s$.

DÉMONSTRATION. (i) D'après le théorème 3.13 il existe une matrice Q inversible telle que $C = QA$ soit échelonnée réduite. Soient $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (r, j_r)$ les positions des pivots de C. On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

En multipliant C par la matrice de permutation $P_\sigma^\top$ à droite, on met devant les colonnes contenant les pivots[3] :

$$CP_\sigma^\top = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \star \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad X \in M_{r\times(n-r)}(K).$$

En posant $Z_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & -X \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$ on remarque que Z_0 est inversible, d'inverse $Z_0^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$. En effet,

$$Z_0 Z_0^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & I_r X - X I_{n-r} \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right).$$

Donc,

$$QAP_\sigma^\top Z_0 = CP_\sigma^\top Z_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_r & -X \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Posant $Z = P_\sigma^\top Z_0$, on conclut la preuve de la partie (i).

(ii). Si $r = s$ les deux matrices sont identiques donc équivalentes. Il reste à montrer que la condition $r = s$ est nécessaire pour l'équivalence de deux matrices. Montrons cela par l'absurde : Supposons que $r \neq s$, donc que $r < s$ sans perte de généralité, et supposons qu'il existe Q,Z inversibles telles que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_{s-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11}Z_{11} & Q_{11}Z_{12} & Q_{11}Z_{13} \\ Q_{21}Z_{11} & Q_{21}Z_{12} & Q_{21}Z_{13} \\ Q_{31}Z_{11} & Q_{31}Z_{12} & Q_{31}Z_{13} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

où Q et Z sont partitionnées de façon compatible (pour que les produits aient un sens). Comme $Q_{11}Z_{11} = I_r$ la matrice Q_{11} est inversible. Comme $Q_{11}Z_{12} = 0$ avec Q_{11} inversible on obtient $Z_{12} = 0$, mais c'est une contradiction avec $Q_{21}Z_{12} = I_{s-r}$. ■

Remarque 3.18 *Dans la langage des « classes d'équivalence », voir* (3.7)*, on peut exprimer le théorème 3.17 ainsi :*

$$M_{m\times n}(K) = \bigcup_{r=0}^{\min\{m,n\}} \left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

où

$$\left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cap \left[\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \emptyset \quad si \quad r \neq s.$$

Corollaire 3.19 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et C_1, C_2 deux formes échelonnées réduites de A, alors le nombre de pivots de C_1 et C_2 est identique.*

DÉMONSTRATION. Il existe $Q_1,Q_2 \in M_{m\times m}(K)$ inversibles telles que $C_1 = Q_1 A$ et $C_2 = Q_2 A$. D'après le théorème 3.17, point (i), C_1 et C_2 sont équivalentes à $E_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où r_1 et r_2 sont les nombres de pivots de C_1 et C_2, respectivement. Comme l'équivalence est transitive, on a que E_1 et E_2 sont équivalentes. D'après le théorème 3.17, point (ii), $r_1 = r_2$. ■

3. Pour montrer ceci il convient de considérer la transposée $(CP_\sigma^\top)^\top = P_\sigma C^\top$.

Avec un peu plus de travail on peut en fait montrer que la forme échelonnée réduite d'une matrice est unique.

Définition 3.20 *Soit $(K,+,\cdot)$ un corps et soit $A \in M_{m\times n}(K)$. Le* ***rang*** *[rank] de A, noté* $\mathsf{rang}(A)$, *est le nombre de pivots r de A.*

Théorème 3.21 *Soit $(K,+,\cdot)$ un corps et soit $A \in M_{m\times n}(K)$. Alors :*

(i) Pour $Q \in M_{m\times m}(K)$, $Z \in M_{n\times n}(K)$ inversibles, on a

$$\mathsf{rang}(QAZ) = \mathsf{rang}(A).$$

(ii) Pour $A = BC$ avec $B \in M_{m\times p}(K)$, $C \in M_{p\times n}(K)$ on a

$$\mathsf{rang}(A) \le \mathsf{rang}(B), \qquad \mathsf{rang}(A) \le \mathsf{rang}(C).$$

(iii) $\mathsf{rang}(A^\mathsf{T}) = \mathsf{rang}(A)$.

DÉMONSTRATION. (i) découle directement du théorème 3.17 et du corollaire 3.19.

(iii). D'après le théorème 3.17 il existe Q, Z inversibles telles que $QAZ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$Z^\mathsf{T} A^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, A^T est équivalente à une matrice de rang r et, ainsi, $\mathsf{rang}(A^\mathsf{T}) = r = \mathsf{rang}(A)$.

(iia) Montrons d'abord que $\mathsf{rang}(A) \le \mathsf{rang}(B)$. Soit Q une matrice inversible telle que QB est en forme échelonnée réduite. Alors les $m - \mathsf{rang}(B)$ dernières lignes de QB sont nulles. Mais alors les $m - \mathsf{rang}(B)$ dernières lignes de $QA = (QB)C$ sont nulles. Le rang d'une matrice $m \times n$ contenant $m - \mathsf{rang}(B)$ lignes nulles ne peut être strictement supérieur à $\mathsf{rang}(B)$. Alors, d'après (i), $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(QA) \le \mathsf{rang}(B)$.

(iib) Pour montrer $\mathsf{rang}(A) \le \mathsf{rang}(C)$, on utilise (iii) et (iib) : $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(A^\mathsf{T}) = \mathsf{rang}(C^\mathsf{T} B^\mathsf{T}) \le \mathsf{rang}(C^\mathsf{T}) = \mathsf{rang}(C)$. ■

3.4 Solutions de systèmes linéaires

On va voir qu'à l'aide de la forme échelonnée (réduite) d'une matrice, l'on peut résoudre aisément des systèmes linéaires et décrire l'ensemble des solutions de ces systèmes.

On considère le système linéaire suivant sur un corps $(K,+,\cdot)$:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

On a vu que ce système s'écrit

$$Ax = b, \tag{3.9}$$

avec $A \in M_{m\times n}(K)$, $x \in K^n$ et $b \in K^m$. Si $b = 0$ on dit que le système linéaire est **homogène** [*homogeneous*], sinon on dit qu'il est **inhomogène** [*inhomogeneous*].

Définition 3.22 *On note par $S(A,b) = \{x \in K^n : Ax = b\}$ l'ensemble des solutions d'un système linéaire.*

Lemme 3.23 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^n$ et soit $x_p \in S(A,b)$. Alors*

$$S(A,b) = \big\{x_p + x_h \,|\, x_h \in S(A,0)\big\}.$$

DÉMONSTRATION. (a) $\big\{x_p + x_h \,|\, x_h \in S(A,0)\big\} \subseteq S(A,b)$: Soit $x_h \in S(A,0)$. Alors

$$A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + 0 \quad \Rightarrow \quad x_p + x_h \in S(A,b).$$

(b) $S(A,b) \subseteq \big\{x_p + x_h \,|\, x_h \in S(A,0)\big\}$: Soit $x \in S(A,b)$. De

$$A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0,$$

on obtient $x = x_p + x_h$ avec $x_h = x - x_p \in S(A,0)$. ■

Le lemme ci-dessus montre une propriété fondamentale des systèmes linéaires : pour trouver l'ensemble des solutions de $Ax = b$ il suffit de trouver l'ensemble des solutions de système homogène associé $Ax = 0$ et d'additionner une solution particulière de $Ax = b$.

Soit $Q \in M_{m\times m}(K)$ inversible. Alors

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QAx = Qb,$$

c-à-d

$$S(A,b) = S(QA,Qb). \tag{3.10}$$

En particulier d'après le théorème 3.13 il existe une matrice Q inversible telle que QA est en forme échelonnée :

$$\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc|}
 & 1 & \star & 0 & \star & 0 & \star & & 0 & \star \\
0 & & & 1 & \star & 0 & \star & & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & & & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\
 & & & & 0 & & & & 0 & \star \\
 & & & & & & 0 & \ddots & 1 & \star \\
 & & & & & & & & & 0
\end{array}\right) x = \tilde{b},$$

On a vu dans la preuve du théorème 3.17, voir (3.8), qu'à l'aide d'une multiplication à droite par une matrice de permutation on obtient

$$\tilde{A} := QAP_\sigma^{\mathsf{T}} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Au contraire de la multiplication à gauche, celle à droite modifie l'ensemble des solutions :

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QAP_\sigma^{\mathsf{T}} P_\sigma x = Qb \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

où $\tilde{x} = P_\sigma x$. Une solution de $Ax = b$ devient une solution de $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ en permutant ses élements, et vice versa. Ecrivons le système $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ sous la forme partitionée

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \tilde{x}_1 \\ \hline \tilde{x}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \tilde{b}_1 \\ \hline \tilde{b}_2 \end{array}\right), \quad \tilde{x}_1 \in K^r, \tilde{x}_2 \in K^{n-r}, \quad \tilde{b}_1 \in K^r, \tilde{b}_2 \in K^{m-r}. \tag{3.11}$$

Ce système peut s'écrire comme

$$\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \qquad 0 = \tilde{b}_2.$$

Donc si $\tilde{b}_2 \neq 0$ le système linéaire $\tilde{A}x = \tilde{b}$ n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**. Si en revanche $\tilde{b}_2 = 0$ alors en posant

$$\tilde{x}_p = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

on obtient une solution particulière, c-à-d $\tilde{x}_p \in S(\tilde{A},\tilde{b})$. On a trouvé

$$S(\tilde{A},\tilde{b}) \neq \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{b}_2 = 0.$$

En considérant la **matrice augmentée** [*augmented matrix*] $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) \in M_{m\times(n+1)}(K)$ on obtient un critère élégant.

Lemme 3.24 *Soit $(K,+,\cdot)$ un corps, soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et $b \in K^m$. Alors $S(A,b) \neq \emptyset$ si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)\right) = \operatorname{rang}(A).$$

DÉMONSTRATION. D'abord, on considère la matrice augmentée du système réduit (3.11) :

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{b} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} I_r & \tilde{A}_{12} & \tilde{b}_1 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{b}_2 \end{array} \right).$$

Si $\tilde{b}_2 = 0$ alors $\operatorname{rang}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \operatorname{rang}(\tilde{A}) =: r$. Si en revanche $\tilde{b}_2 \neq 0$ alors la matrice a un pivot de plus que $\tilde{A}$ et donc $\operatorname{rang}(\tilde{A}|\tilde{b}) = r+1 \neq \operatorname{rang}(\tilde{A})$. Selon la discussion ci-dessus, $\tilde{b}_2 = 0$ si et seulement si $S(A,b) \neq \emptyset$. Alors la conclusion du lemme est vraie pour (3.11).

Le théorème 3.21, point (i), montre la conclusion du lemme pour le système d'origine $Ax = b$:

$$\operatorname{rang}(\tilde{A}) = \operatorname{rang}(QAP_\sigma^T) = \operatorname{rang}(A),$$
$$\operatorname{rang}\left(\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{b} \end{array} \right)\right) = \operatorname{rang}\left(Q\left(\begin{array}{c|c} AP_\sigma^T & b \end{array} \right)\right) = \operatorname{rang}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)\right).$$

■

Pour décrire l'ensemble des solutions de $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ on utilise le lemme 3.23. On sait déjà, voir (3.12), que $\tilde{x}_p = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution particulière si $\tilde{b}_2 = 0$. Dans le cas homogène ($\tilde{b}_1 = 0$) on a

$$S(\tilde{A},0) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{x}_{h1} \\ \tilde{x}_{h2} \end{pmatrix} : \tilde{x}_{h2} \in K^{n-r}, \tilde{x}_{h1} = -\tilde{A}_{12}\tilde{x}_{h2} \right\},$$

et donc

$$S(\tilde{A},\tilde{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{x}_{h2} \\ \tilde{x}_{h2} \end{pmatrix} : \tilde{x}_{h2} \in K^{n-r} \right\}.$$

Comme $\tilde{x}_{h2}$ peut être choisi librement, on a

- une solution unique si $n = r$ et $\tilde{b}_2 = 0$,
- plus d'une solution si $n > r$ et $\tilde{b}_2 = 0$,
- pas de solution si $\tilde{b}_2 \neq 0$.

Comme $\tilde{x} \in S(\tilde{A},\tilde{b})$ si et seulement si $P_\sigma^T\tilde{x} \in S(A,b)$, on obtient la caractérisation suivante.

Solutions de $Ax = b$ avec $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$

1. Si $\operatorname{rang}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)\right) > \operatorname{rang}(A)$ alors $S(A,b) = \emptyset$.
2. Si $\operatorname{rang}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)\right) = \operatorname{rang}(A) = n$ il existe une solution unique à $Ax = b$.
3. Si $\operatorname{rang}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)\right) = \operatorname{rang}(A) < n$ il existe plus qu'une solution à $Ax = b$.

Attention ! Dans un corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on a une infinité de solutions dans le cas 3. Dans un corps fini comme (par exemple $\mathbb{F}_p$) on a seulement un nombre fini de solutions dans le cas 3.

Exemple 3.25 Soit $K = \mathbb{Q}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Afin de déterminer l'ensemble des solutions de $Ax = b$, on va d'abord réduire A sous sa forme échelonnée QA. C'est une bonne idée qu'on appliquer les transformations correspondantes à b pendant la réduction au lieu de calculer explicitement Qb après la réduction :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} QA & Qb \end{array}\right).
\end{aligned}$$

On rearrange les colonnes par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} QAP^{\mathsf{T}} & Qb \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Finalement

$$S(\tilde{A},\tilde{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} : \tilde{x}_4 \in \mathbb{Q} \right\} \quad \Rightarrow \quad S(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

♦