Chapitre 1

Calcul matriciel

Les matrices jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire et plus généralement en mathématiques. À première vue, une matrice n'est rien d'autre qu'un tableau, comme une feuille de calcul Excel ou Google Docs. Mais quand on définit des opérations comme le produit matriciel, les matrices deviennent beaucoup plus intéressant !

Si vous le souhaitez, vous pouvez passer toutes les parties qui sont concernées par MATLAB**. Ce logiciel est très utile pour calculer avec des matrices, mais ce n'est pas nécessaire pour suivre le cours.**

1.1 Matrices, vecteurs colonnes, vecteurs lignes

Définition 1.1 *On appelle* ***matrice*** *$m \times n$ [matrix] (ou matrice de* ***taille*** *[size] $m \times n$) un tableau rectangulaire de nombres, arrangés en m* ***lignes*** *[rows] et n* ***colonnes*** *[columns] :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pour l'instant, les **éléments** ou **coefficients** a_{ij} $(i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n)$ d'une matrice A sont des nombres réels. Mais une matrice peut contenir des éléments d'un autre type, comme des nombres complexes ou des polynômes. On va définir plus tard un anneau commutatif K (voir section 2.3) de façon axiomatique et considerer des matrices à coefficients dans A. Toutes les propriétés et définitions du calcul matriciel discutées dans ce chapitre seront valables pour des corps quelconques. On note $M_{m\times n}(K)$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans K. Comme dit au-dessus, pour l'instant $K = \mathbb{R}$.

Exemple 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

est une matrice 2×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le coefficient $(1,2)$ est $a_{12} = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 \\ -2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

est une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. ♦

MATLAB

Le logiciel MATLAB permet de manipuler facilement des matrices. On entre les commandes suivantes pour l'exemple 1.2 :

```
>> A = [  5  3  1; 4 -1  4 ]
A =  5     3     1
     4    -1     4
>> A(1,2)
ans =
     3
>> A = [ 1+1i, 2; -2, 1-1i ]
A =
   1.0000 + 1.0000i   2.0000 + 0.0000i
  -2.0000 + 0.0000i   1.0000 - 1.0000i
```

Les éléments d'une matrice doivent être mis entre crochets []. Les éléments d'une ligne sont séparés par des espaces ou des virgules et les lignes sont séparées par des point-virgules. Afin d'éviter des erreurs il est recommandé d'utiliser toujours une virgule pour séparer les expressions composées dans une ligne. La commande `size` renvoie la taille (m,n) d'une matrice $m \times n$.

Définition 1.3 *Une matrice $m \times 1$ s'appelle une* ***vecteur colonne de taille*** *m [column vector of length m], une matrice $1 \times n$ s'appelle une* ***vecteur ligne de taille*** *n [row vector of length n].*

On préfère souvent utiliser des vecteurs colonnes. Si le contexte est clair, on dire simplement vecteur. Pour accèder aux éléments d'une matrice générale, on utilise deux indices, un indice ligne et un indice colonne. Seul un indice suffit pour des vecteurs. Par exemple :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}.$$

MATLAB

Le j-ième vecteur colonne d'une matrice A est désigné par `A(:,j)`. Bien entendu, la i-ième ligne est désignée par `A(i,:)`. La commande `length` renvoie la taille d'un vecteur.

```
>> A =  [  8  1  6; 3  5  7; 4  9  2 ];
>> A(:,1),
ans = 8
      3
      4
>> A(2,:),
ans = 3    5    7
```

1.2 Quelques matrices particulières

Matrices carrées. Une matrice $n \times n$ s'appelle **matrice carrée** [*square matrix*] de taille n. On dit parfois **matrice rectangulaire** pour une matrice qui n'est pas nécessairement carrée.

Matrices nulles. Une **matrice nulle** [*zero matrix*] est une matrice $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls. On écrit $0_{m\times n}$ ou, si le contexte est clair, simplement 0.

Exemple 1.4

La matrice nulle de taille 3×3 et le vecteur nul de taille 3 prennent la forme suivante :

$$0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

♦

MATLAB

```
>> zeros(3)
ans = 0      0      0
      0      0      0
      0      0      0
>> zeros(3,1)
ans = 0
      0
      0
```

Diagonale d'une matrice et des matrices diagonales. Soit A une matrice $m \times n$. Les éléments a_{ii} $(i = 1,\dots,\min\{m,n\})$ s'appellent les **éléments diagonaux** [*diagonal elements*] de la matrice.

Une matrice carrée A de taille n est dite **matrice diagonale** [*diagonal matrix*] si les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note

$$D = \mathsf{diag}\,(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}) = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale avec les éléments $d_{11},\dots,d_{nn}$ sur la diagonale (et avec des zéros ailleurs).

Exemple 1.5

$$D = \mathsf{diag}\,(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

est une matrice diagonale de taille 3. Les éléments diagonaux de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

sont $5, -1$. ♦

MATLAB

```
>> diag([ 5   3   1; 4 -1   4 ]),
ans =   5
       -1
>> diag([ 1   2   3 ]),
ans = 1      0      0
      0      2      0
      0      0      3
```

Matrice identité. Une matrice diagonale de taille n s'appelle une **matrice identité** [*identity matrix*] ou **matrice unité** [*unit matrix*] si $a_{ii} = 1$ pour $i = 1,\dots,n$. Elle peut s'écrire

$$I_n = \mathsf{diag}\,(1,1,\ \dots,1).$$

Exemple 1.6

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♦

MATLAB

```
>> eye(3),
ans = 1      0      0
      0      1      0
      0      0      1
```

Matrices triangulaires. Une **matrice triangulaire supérieure** [*upper triangular matrix*] est une matrice $U \in M_{m\times n}(K)$ dont toutes les coefficients sous la diagonale sont nuls, c-à-d $u_{ij} = 0$ si $i > j$.

Une **matrice triangulaire inférieure** [*lower triangular matrix*] est une matrice $L \in M_{m\times n}(K)$ dont toutes les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls, c-à-d $\ell_{ij} = 0$ si $i < j$.

On utilise les symboles suivants pour désigner des matrices *carrées* triangulaires:

$$U = \text{◥}, \qquad L = \text{◣}.$$

Exemple 1.7 Exemple d'une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exemples de matrices triangulaires rectangulaires :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

MATLAB

```
>> A = [  8   1   6; 3   5   7;
          4   9   2 ];
% triu extrait la partie
% triangulaire superieure
>> triu(A),
ans = 8      1      6
      0      5      7
      0      0      2
% tril extrait la partie
% triangulaire inferieure
>> tril(A),
ans = 8      0      0
      3      5      0
      4      9      2
```

♦

1.3 Notation

Dans ce cours, les matrices sont désignées par des lettres latines majuscules $(A,B,\ldots)$ et vecteurs (colonnes ou lignes) par des lettres latines minuscules $(v,w,x,y,\ldots)$. Les scalaires (qui ne sont pas des éléments d'une matrice ou d'un vecteur) sont souvent désignés par des minuscules grecques $(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$.

1.4 Applications des matrices

Cette section présente deux applications simples des matrices.

1.4.1 Images

Sous MATLAB, la commande `imread` permet de lire une image, par exemple `X = imread('ngc6543a.jpg')`. Dans le cas d'un image en niveaux de gris avec $n \times m$ pixels, cette commande renvoie une matrice X de taille $m \times n$ dont l'élément (i,j) est le niveau de gris du pixel (j,i). Dans le cas d'un image couleur, on obtient un tableau à 3 dimensions de taille $m \times n \times 3$. Pour chaque pixel, les niveaux de rouge, vert et bleu (RVB, RGB en anglais) sont codés entre un minimum de 0 et un maximum de 255, voir tableau 1.1. La première matrice $m \times n$ (accès par `X(:,:,1)`) contient les niveaux de rouge, la deuxième les niveaux de vert, et la troisième les niveaux de bleu.

Exemple 1.8

Le script MATLAB à droite produit l'échiquier figurant dans la figure 1.1. La commande `X(1:2:8,1:2:8)` permet de supprimer une ligne et une colonne sur deux. ♦

MATLAB

```
X = zeros(8,8,'uint8');
X(1:2:8,1:2:8) = 255;
X(2:2:8,2:2:8) = 255;
X(:,:,2) = X;
X(:,:,3) = X(:,:,1);
image(X); axis off, axis square
```

TAB. 1.1 – Exemples du code RVB

valeur de rouge	valeur de vert	valeur de bleu	couleur
0	0	0	noir
255	255	255	blanc
255	0	0	rouge
0	128	0	vert
0	0	255	bleu
255	255	0	jaune
0	255	255	cyan
255	0	255	magenta

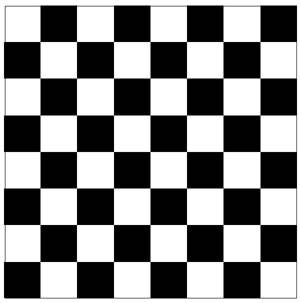


FIG. 1.1 – L'échiquier de l'exemple 1.8

1.4.2 Graphes

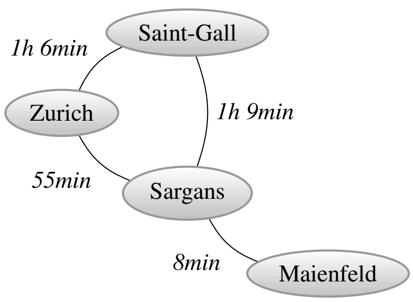
Un **graphe** est un couple $G = (V,E)$ où V est l'ensemble des **nœuds** (ou des **sommets**, [*nodes*] ou [*vertices*]) et E l'ensemble des **arêtes** [*edges*]. Les arêtes peuvent être orientées (arcs ou flèches) ou non orientées (traits).

Graphes non orientés. Dans ce cas, une arête est une paire non ordonnée de nœuds, ainsi $E \subset \mathscr{P}_2(V)$.

Exemple 1.9 (Graphe Heidi)
La figure à droite montre une (petite) partie du réseau CFF, avec les temps du parcours. On peut considérer le reseau comme un graph non orienté avec

$$V = \{\text{Maienfeld}, \text{Saint-Gall}, \text{Sargans}, \text{Zurich}\},$$

$$E = \{ \begin{array}{ll} \{\text{Maienfeld}, & \text{Sargans}\}, \\ \{\text{Sargans}, & \text{Saint-Gall}\}, \\ \{\text{Sargans}, & \text{Zurich}\}, \\ \{\text{Saint-Gall}, & \text{Zurich}\}\,\}. \end{array}$$



♦

On peut représenter un graphe $G = (V,E)$ avec n nœuds par une matrice $n \times n$, la **matrice d'adjacence** [*adjacency matrix*]. Cette matrice A est définie en posant $a_{ij} = 1$, s'il existe une arête entre les sommets i et j, et $a_{ij} = 0$ sinon. Par exemple, pour le graphe Heidi, en numérotant les sommets dans l'ordre alphabétique croissant, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

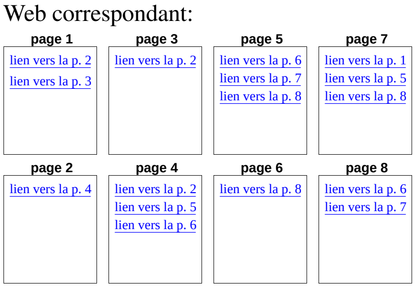
On appelle un **graphe pondéré** [*weighted graph*] un graphe dont les arêtes portent des poids. Par exemple, les arêtes du graphe Heidi portent les temps du parcours. En posant formellement $a_{ij} = \infty$ s'il n'y a pas de connexion directe entre les lieux i et j, on obtient la matrice d'adjacence pondérée

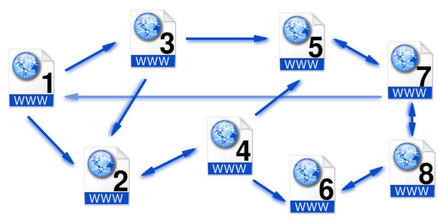
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 69 & 55 \\ \infty & 69 & 0 & 66 \\ \infty & 55 & 66 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Ces matrices sont utilisées pour déterminer le temps de parcours les plus courts.

Graphes orientés. Dans ce cas, un arc est un couple (ordoné) de nœuds, ainsi $E \subset V \times V$.

Exemple 1.10 (Graphe du Web) Le World Wide Web est un graphe gigantesque, dont les sommets sont les pages Web. Un arc du sommet i vers le sommet j indique qu'il existe un lien sur la page i vers la page j. Les illustrations suivantes montrent un réseau Intranet avec 8 pages et le graphe du Web correspondant:





En choisissant comme ensemble des sommets $V = \{1,2,\dots,8\}$, l'ensemble des arcs est donné par

$$E = \{ \quad \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(2,4),(3,2),(3,5),(4,2),(4,5),(4,6), \\ (5,7),(6,8),(7,1),(7,5),(7,8),(8,6),(8,7) \,\}. \end{array}$$

♦

La matrice d'adjacence d'un graphe orienté est définie de façon similaire à celle d'un graphe non orienté: $a_{ij} = 1$ s'il existe un arc du sommet i vers le sommet j, $a_{ij} = 0$ si non. Pour le graphe du web ci-dessu on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Opérations sur les matrices et les vecteurs

1.5.1 Opérations élémentaires

Multiplication d'une matrice par un scalaire. Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et $\alpha \in K$. Pour effectuer le produit $\alpha A \in M_{m\times n}(K)$ on multiplie tous les éléments de A par α:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij} \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

Exemple 1.11

$$5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 25 \\ -10 & 20 & -30 \end{pmatrix},$$
$$\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

MATLAB
```
>> 5*[ 1 -3  5; -2  4 -6 ],
ans =      5    -15     25
         -10     20    -30
>> [ 4; 8 ] / 4,
ans =      1
           2
```

Somme de matrices. On définit la somme de deux matrices $A,B \in M_{m\times n}(K)$ comme la matrice $C \in M_{m\times n}(K)$ telle que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

Lemme 1.12 *Soient $A,B,C \in M_{m\times n}(K)$ et $\alpha,\beta \in K$. Alors*

(i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
(ii) $(\alpha+\beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$,
(iii) $\alpha(A+B) = (\alpha A) + (\alpha B)$,
(iv) $A+B = B+A$,
(v) $A + 0_{m\times n} = A$,
(vi) $A + (-1\cdot A) = 0_{m\times n}$.

DÉMONSTRATION. Pour $K = \mathbb{R}$ les propriétés découlent des propriétés analogues dans $\mathbb{R}$. Par exemple la démonstration de (iv):

$$\begin{aligned}(A+B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} && \text{(déf. de d'addition matricielle)}\\ &= b_{ij} + a_{ij} && \text{(commutativité dans } \mathbb{R}\text{)}\\ &= (B+A)_{ij} && \text{(déf. de d'addition matricielle)}\end{aligned}$$

Pour un corps les propriétés découlent des axiomes des corps, voir section 2.3. ■

Grâce au point (vi) du lemme 1.12, on définit $-A = -1\cdot A$ et la **soustraction matricielle** par $B - A = B + (-A)$.

Exemple 1.13

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

MATLAB
```
>> [  5   2; -1 -5 ] + ...
   [ -1   1;  6  5 ],
ans =     4      3
          5      0
>> [ 2; 5; 9 ] - [ 1; -1; -3 ],
ans =     1
          6
         12
```

1.5.2 Multiplication matrice vecteur

Définition 1.14 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et v un vecteur colonne de taille n à coefficients dans K. Le produit matrice-vecteur [matrix-vector product] $w = Av$ est un vecteur colonne de taille m à coefficients dans K dont les coefficients sont donnés par :*

$$\boxed{w_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \cdots + a_{in} v_n, \quad (i = 1, \ldots, m).} \tag{1.3}$$

La définition (1.3) peut s'exprimer da la manière suivante : le i-ième coefficient de w est donné par la somme des produits des éléments de la i-ième ligne de A par les éléments de v. Voici une illustration :

$$i\text{-ième ligne} \rightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}} \underset{v}{\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix}} = \underset{Av}{\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix}} \leftarrow (Av)_i = w_i$$

Exemple 1.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w = Av = \begin{matrix} 1\cdot 2 & + & (-3)\cdot 1 & + & 5\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 2 & + & 4\cdot 1 & + & (-6)\cdot(-1) \end{matrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

MATLAB

Sous MATLAB on utilise l'operateur $*$ pour calculer un produit matrice-vecteur:

```
>> A = [ 1 -3  5; -2  4 -6 ];
>> b = [ 2; 1; -1 ];
>> A*b,
ans =    -6
          6
```

Produit matrice-vecteur et système linéaire. La definition de la produit matrice-vecteur permet d'abréger la description d'un système linéaire. On considère par exemple le système linéaire (0.5):

$$\begin{matrix} x_1 + & 4x_2 + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + & 4x_2 + & 16x_3 & = & 12 \\ 4x_1 + & 2x_2 + & x_3 & = & -1 \end{matrix}. \tag{1.4}$$

Si on définit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 16 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix},$$

l'équation $Ax = b$ et le système (1.4) sont équivalentes.

Plus généralement, un système linéaire de m èquations à n inconnues prend la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Si on définit une matrice A $(m \times n)$ ayant pour éléments les a_{ij}, un vecteur x ayant pour éléments les x_j et un vecteur b ayant comme éléments les b_i, ce système linéaire est encore équivalent à

$$\boxed{Ax = b.} \tag{1.5}$$

On appelle parfois A la **matrice des coefficients du système** [*coefficient matrix, system matrix*], x le **vecteur solution** [*solution vector*] et b le **côté droit** [*right-hand side*].

Suite de Fibonacci. La **suite de Fibonacci** [*Fibonacci sequence*]

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\ldots$$

est définie par la relation de récurrence:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \qquad f_{k+2} = f_{k+1} + f_k, \quad k \geq 0. \tag{1.6}$$

Leonardo Fibonacci, en utilisant cette récurrence, a décrit la croissance explosive d'une population de lapins.

Si on définit $b_k = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$ pour $k = 0,1,\ldots$, la récurrence (1.6) devient un produit matrice-vecteur:

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b_k, \quad k \geq 0. \tag{1.7}$$

Plus tard, lorsque nous parlerons des valeurs propres, cette représentation donnera une expression explicite de suite de Fibonacci.

1.5.3 Produit matriciel

Définition 1.16 *Soient $A \in M_{m\times n}(K)$ et $B \in M_{n\times p}(K)$. Le* ***produit matriciel*** *[matrix product] $C = AB$ est une matrice $m \times p$ à coefficients dans K dont les coefficients sont donnés par :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,p). \tag{1.8}$$

La définition (1.8) peut s'exprimer de la manière suivante : l'élément (i,j) de C est donné par la somme des produits de éléments de la i-ième ligne de A par les éléments de la j-ième colonne de B. Voici une illustration de cette « règle ligne-colonne »pour $m=5, n=4, p=3$:

$$
\begin{array}{c}
i\text{-ième ligne} \to
\end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{array}{c} j\text{-ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \end{array}}_{B}
=
\underbrace{\begin{array}{c} j\text{-ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \end{array}}_{C=AB}
\leftarrow i\text{-ième ligne}
$$

Pour calculer le produit matriciel à la main il est recommandé de placer la matrice A à gauche et la matrice B en haut de la matrice C:

$$
\begin{array}{cc}
 & \overset{B}{\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}} \\
\underset{A}{\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}} & \underset{C=AB}{\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

On remarque que le produit matrice-vecteur est un cas particulier du produit matrice-matrice.

Exemple 1.17 Soient

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

On calcule le produit matricielle à l'aide du schema ci-dessus:

$$
\begin{array}{cc}
 & \overset{B}{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\
\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} & \underset{C=AB}{\begin{pmatrix} 18 & -14 & 1 & -2 \\ 42 & -32 & 4 & -5 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Par exemple, on calcule pour l'élément $(2,1)$:

$$
\begin{aligned}
a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} &= 4 \cdot 7 + 5 \cdot (-8) + 6 \cdot 9 \\
&= 28 - 40 + 54 = 42.
\end{aligned}
$$

MATLAB

Comme dans le cas de produit matrice-vecteur, on calcule un produit matriciel à l'aide de l'operateur $*$ sous MATLAB:

```
>> A = [ 1   2   3; ...
         4   5   6 ];
>> B = [ 7  -1   1   0;
        -8  -2   0  -1;
         9  -3   0   0 ];
>> A*B,
ans =
     18    -14      1     -2
     42    -32      4     -5
```

Remarque 1.18 *La définition du produit matriciel correspond à la composition des produits matrice-vecteur. Soient $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$ et $v \in M_{p\times 1}(K)$. On desire calculer le vecteur $x = A(Bv)$, qu'on separe dans les deux produits $w = Bv$ et $x = Aw$. Par* (1.3)*,* *nous avons*

$$w_j = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} v_k \qquad (j = 1, \dots, p)$$

et

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{jk} v_k = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}_{=:c_{ik}} v_k. \qquad (i = 1, \dots, m)$$

Alors, $x = Cv$ *òu* $C = AB$.

Produit des matrices particulières. Le produit matriciel se simplifie, parfois fortement, dans des cas particuliers.

Multiplication par une matrice nulle. Si A ou B est une matrice nulle (de la taille appropriée), tous les termes de la somme (1.8) sont nuls. Alors, le produit matriciel est nul:

$$A0_{n\times p} = 0_{m\times p}, \qquad 0_{m\times n}B = 0_{m\times p},$$

pour toutes matrices $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$.

Multiplication par la matrice identité. Si $B = I_n$, les éléments de $C = AB$ satisfont

$$c_{ij} = a_{i1} \underbrace{b_{1j}}_{=0} + \cdots + a_{i,j-1} \underbrace{b_{j-1,j}}_{=0} + a_{ij} \underbrace{b_{jj}}_{=1} + a_{i,j+1} \underbrace{b_{j+1,j}}_{=0} + \cdots + a_{in} \underbrace{b_{nj}}_{=0} = a_{ij}. \tag{1.9}$$

Alors, $A\,I_n = A$ et, de manière analogue, $I_m B = B$ pour toutes matrices $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$.

Multiplication par une matrice diagonale. Par analogie avec (1.9), le produit matriciel $C = A\,D$ d'une matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ par une matrice diagonale $D = \mathsf{diag}\,(d_{11}, \dots, d_{nn})$ se calcule comme suit:

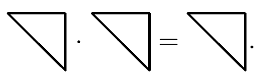
$$c_{ij} = a_{ij} d_{jj}.$$

En notant $a_1, \dots, a_n$ les colonnes de la matrice A et $c_1, \dots, c_n$ celles de la matrice C, on a

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} d_{11}a_1 & d_{22}a_2 & \cdots & d_{nn}a_n \end{array} \right).$$

Alors, multiplier une matrice A à droite par une matrice diagonale revient à multiplier chaque colonne de A par l'élément diagonal correspondant. Cette opération s'appelle « diagonal scaling »en anglais. De manière analogue, on peut voir que la multiplication à gauche par une matrice diagonale revient à multiplier chaque ligne de A par lélément diagonal correspondant.

Produit de matrices triangulaires. Si A et B sont matrices $n \times n$ triangulaires supérieures (inférieures), le produit matriciel $C = A\,B$ est encore une matrice triangulaire supérieure (inférieure); voir ci-dessous, lemme 2.8. Voici une illustration de cette assertion par des symboles:



Plus tard, en chapitre 2, on va discuter un autre cas particulier important : la multiplication par une matrice de permutation.

Propriétés du produit matriciel.

Lemme 1.19

$$(AB)C = A(BC) \qquad \forall A \in M_{m\times n}(K),\, B \in M_{n\times p}(K),\, C \in M_{p\times q}(K), \tag{1.10}$$
$$(A+B)C = (AC)+(BC) \qquad \forall A,B \in M_{m\times n}(K),\, C \in M_{n\times p}(K), \tag{1.11}$$
$$A(B+C) = (AB)+(AC) \qquad \forall A \in M_{m\times n}(K),\, B,C \in M_{n\times p}(K). \tag{1.12}$$

DÉMONSTRATION. Voir les exercises. ■

Quelques remarques:

1. La propriété associative (1.10) permet de supprimer les parenthèses: On peut écrire $A(BC) = ABC$. En plus, les multiplications sont prioritaires sur les additions et soustractions (comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Par exemple, on a $(AB)+(CD) = AB+CD$.
2. Lemme 1.19 est un résultat théorique. En pratique, il peut y avoir une grande différence entre le coût numerique des deux opérations équivalentes. Par exemple, si $A \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $B \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'ordre des opérations $(AB)C$ est beaucoup plus cher que $A(BC)$.
3. Remarque 1.18 est un cas particulier de (1.10).

Le produit matriciel n'est, en général, pas commutatif:

$$AB \neq BA\,.$$

Par exemple, soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

mais le produit BA n'est pas même défini. Même quand AB et BA sont définis, le produit ne commute pas en général.

Exemple 1.20

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -7 & -25 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $AB = BA$, on dit que les matrices A et B **commutent**. Des matrices qui commutent sont l'exception plutôt que la règle. La matrice identité I_n commute avec toutes les matrices $n\times n$: $I_n A = A = A I_n$. On a l'assertion plus forte : Une matrice $A \in M_{n\times n}(K)$ commute avec toutes les matrices $n\times n$ si et seulement si A est scalaire.[1] (Voir exercices)

Remarque 1.21 *Pour deux matrices $A,B \in M_{m\times n}(K)$ le produit de Hadamard (ou le produit de Schur) de A et B est une matrice $m\times n$ dont les coefficients sont $a_{ij}b_{ij}$ ($i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$). Contrairement au produit matriciel classique, ce produit terme à terme est commutatif mais, malheureusement, il est beaucoup moins utile! Pour réaliser ces opérations terme à terme sous* MATLAB*, on met un point avant l'operateurs:* `A.*B`, `A./B`, `A.^B`.

1. Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.

Une autre formulation du produit matrice-vecteur/matrice. Soit $A \in M_{m\times n}(K)$. On considère les colonnes de A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \right),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M_{m\times 1}(K)$. Le lemme suivant permet de formuler un produit matrice-vecteur comme une combinasion linéaire (voir chapitre 4) des colonnes de A.

Lemme 1.22 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M_{m\times 1}(K)$ les colonnes de A comme ci-dessus, et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(K)$. Alors,*

$$\boxed{Ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n\,.} \tag{1.13}$$

DÉMONSTRATION. Pour vérifier (1.13), on considère le i-ième élément :

$$(Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k)_i x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_kx_k)_i = \sum_{k=1}^{n} (x_ka_k)_i.$$

■

Un cas particulier interessant de (1.13) est celui où $x = e_j$, la j-ième colonne de la matrice identité I_n :

$$\boxed{Ae_j = a_j\,.} \tag{1.14}$$

Lemme 1.23 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} \in M_{n\times p}(K)$. Alors,*

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{array} \right).$$

DÉMONSTRATION. Par (1.14), on a $b_j = Be_j$, $j = 1, \ldots, p$. Pour la même raison, la j-ième colonne du produit AB est $(AB)e_j$. Grâce à l'associativité de la multiplication matricielle, le lemme 1.22 implique

$$(AB)e_j = A(Be_j) = Ab_j$$

pour $j = 1, \ldots, p$. ■

1.6 La transposée d'une matrice

Définition 1.24 *Soit $A \in M_{m\times n}(K)$. On appelle **transposée** [transpose] de A la matrice $A^{\mathsf{T}} \in M_{n\times m}(K)$ dont les éléments sont*

$$(A^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple 1.25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

MATLAB

Pour transposer une matrice (reelle), on utilise le symbole apostrophe sous MATLAB:

```
>> A = [ 1 5; 2 6; 3 7; 4 8 ]; A'
ans =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
```

On remarque que A^T est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A. En particulier, la tranposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne et vice-versa.

Lemme 1.26 *(i)*

$$\boxed{(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A} \qquad \forall A \in M_{m\times n}(K). \tag{1.15}$$

(ii)

$$\boxed{(\alpha A)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T}} \qquad \forall A \in M_{m\times n}(K), \alpha \in K. \tag{1.16}$$

(iii)

$$\boxed{(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}} \qquad \forall A,B \in M_{m\times n}(K). \tag{1.17}$$

(iv)

$$\boxed{(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}} \qquad \forall A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times p}(K). \tag{1.18}$$

DÉMONSTRATION. Les propriétés (i)–(iii) sont des exercices faciles. Pour montrer (iv), on remarque tout d'abord que la matrice AB est de taille $m\times p$ et ainsi $(AB)^\mathsf{T}$ est une matrice $p\times m$. Le produit $B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$ est aussi une matrice $p\times m$, avec les éléments suivants:

$$\begin{aligned} ((AB)^\mathsf{T})_{ij} = (AB)_{ji} &= \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (B^\mathsf{T})_{ik}(A^\mathsf{T})_{kj} = (B^\mathsf{T}A^\mathsf{T})_{ij}. \end{aligned}$$

■

1.7 Matrices symétriques

Définition 1.27 *On dit qu'une matrice carrée A est* ***symétrique*** *[symmetric] si*

$$A^\mathsf{T} = A, \quad \text{c-à-d} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1,\dots,n.$$

Nous avons déjà fait la connaissance des matrices symétriques: La matrice d'adjacence (1.1) d'un graphe non orienté. La définition suivante est quasiment le contraire de la symétrie.

Définition 1.28 *On dit qu'une matrice carrée A est* ***antisymétrique*** *[skew-symmetric] si $A^\mathsf{T} = -A$.*

Exemple 1.29 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique et la matrice B est antisymétrique.

Remarque 1.30 *Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours nuls: $a_{ii} = 0$ ($i = 1,\dots,n$). Toute matrice carrée s'écrit, de façon unique, comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

Le produit de deux matrices symétriques n'est, en général, pas symmetrique! Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais une autre relation est vraie.

Lemme 1.31 *Soient $A \in M_{m\times n}(K)$ et $B \in M_{m\times m}(K)$. Si B est symétrique, alors $A^\mathsf{T}BA$ est aussi symétrique.*

DÉMONSTRATION. Voir les exercices. ■

Un cas particulier ($B = I_m$) de lemme 1.31 : $A^\mathsf{T}A$ est symétrique pour toute matrice $A \in M_{m\times n}$. De façon analogue, AA^T est symétrique.

1.8 L'inverse d'une matrice

Définition 1.32 *Une matrice $A \in M_{n\times n}(K)$ est dite* ***inversible*** *s'il existe une matrice $X \in M_{n\times n}(K)$ telle que*

$$AX = XA = I_n. \tag{1.19}$$

Une matrice non-inversible est ***singulière****.*

Tout nombre réel non nul possède un inverse. Au contraire, si $n \geq 2$, une matrice carrée non nulle n'est pas toujours inversible. Par exemple, pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il est impossible de trouver une matrice $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telle que $AX = I_2$:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

En général, ce n'est pas facile de déterminer si une matrice est inversible, voir chapitre 3.

Lemme 1.33 *L'inverse d'une matrice s'il existe (c-à-d il existe X avec* (1.19)*) est unique.*

DÉMONSTRATION. Si $AX = XA = I_n = A\tilde{X} = \tilde{X} = I_n$, alors $\tilde{X} = \tilde{X}\cdot I_n = \tilde{X}AX = I_n \cdot X = X$. ■

On note A^{-1} l'inverse d'une matrice $A \in M_{n\times n}(K)$ (s'il existe) :

$$\boxed{AA^{-1} = I_n = A^{-1}A\,.}$$

Exemple 1.34 On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que ces matrices sont inverses l'une de l'autre.
L'inverse d'une matrice diagonale est encore une matrice diagonale :

$$\mathsf{diag}\,(d_{11},\ldots,d_{nn})^{-1} = \mathsf{diag}\,(1/d_{11},\ldots,1/d_{nn}).$$

En particulier la matrice d'identité I_n est bien sûr inversible : I_n est sa propre inverse !

MATLAB

Sous MATLAB on calcule l'inverse par `inv`.

```
>> A = [ 2 2; 1 2 ]; inv(A)
ans =
    1.0000   -1.0000
   -0.5000    1.0000
```

Mais attention ! Dans la pratique on a rarement besoin de utiliser `inv` ! En lieu de calculer explicitement l'inverse on a assez souvent besoin de multiplier l'inverse d'une matrice par une autre matrice ou un vecteur. Dans ce cas les commandes `A \ B` resp. `B / A` sont moins coûteuses en calcul et plus précises que `inv(A)*B` resp. `B*inv(A)`.

```
>> b = [ 1; 0 ]; A \ b
ans =
    1.0000
   -0.5000
```

Il se trouve qu'une de deux conditions (1.19) suffit à determiner l'inverse.

Lemme 1.35 *Soit $A \in M_{n\times n}(K)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) *A est inversible.*

ii) *Il existe une matrice* $X \in M_{n\times n}(K)$ *telle que* $AX = I_n$.
iii) *Il existe une matrice* $X \in M_{n\times n}(K)$ *telle que* $XA = I_n$.

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 3. ■

Le lemme suivant contient quelques propriétés de l'inverse.

Lemme 1.36 *Soient* $A,B \in M_{n\times n}(K)$ *des matrices inversibles. Alors :*

i) A^{-1} *est inversible et*

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A\,.} \tag{1.20}$$

ii) AB *est inversible et*

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.} \tag{1.21}$$

iii) A^{T} *est inversible et*

$$\boxed{(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}\,.} \tag{1.22}$$

DÉMONSTRATION. i) découle directement de la définition (1.19).

ii) Par $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et par le lemme 1.35, la matrice $B^{-1}A^{-1}$ est l'inverse de AB.

iii) La règle (1.18) de transposition signifie que $A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{-1}A)^{\mathsf{T}} = I_n^{\mathsf{T}} = I_n$. Ainsi, $(A^{-1})^{\mathsf{T}}$ est l'inverse de A^{T}. ■

1.9 Sous-matrices

En ne gardant que certaines lignes ou colonnes d'une matrice on obtient une nouvelle matrice que l'on appelle sous-matrice.

Définition 1.37 *Soit* A *une matrice* $m\times n$ *et soient* $\mathscr{I} = \{i_1,\dots,i_k\}$, $\mathscr{J} = \{j_1,\dots,j_\ell\}$ *sous-ensembles de* $\mathbb{N}$ *avec*

$$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m, \quad 1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n\,.$$

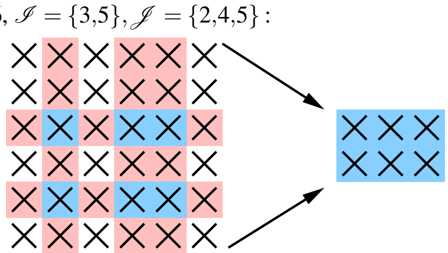
La matrice $k\times\ell$

$$A(\mathscr{I},\mathscr{J}) = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_\ell} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & a_{i_m,j_2} & \cdots & a_{i_m,j_\ell} \end{pmatrix}$$

est la ***sous-matrice*** *[submatrix] correspondante de* A. *On dit qu'une sous-matrice est* ***principale*** *si* $\mathscr{I} = \mathscr{J}$.

Exemple 1.38

Une illustration des sous-matrices pour $m = n = 6$, $\mathscr{I} = \{3,5\}$, $\mathscr{J} = \{2,4,5\}$:



MATLAB

```
>> A = magic(6)
A =
   35     1     6    26    19    24
    3    32     7    21    23    25
   31     9     2    22    27    20
    8    28    33    17    10    15
   30     5    34    12    14    16
    4    36    29    13    18    11
>> A([3,5],[2,4,5])
ans =
    9    22    27
    5    12    14
```