Chapitre 0

Systèmes d'équations linéaires

Afin de commencer en douceur, ce chapitre rappelle des concepts élémentaires des systèmes linéaires.

Une équation à une inconnue. Une équation linéaire à une inconnue x,

$$ax = b\,,$$

a exactement une solution

$$x = \frac{b}{a}\,,$$

sauf si $a = 0$. Dans cette situation exceptionnelle on a deux cas possibles:

$$\begin{array}{ll} a = 0,\, b = 0: & \text{une infinité de solutions,} \\ a = 0,\, b \neq 0: & \text{pas de solution.} \end{array}$$

Deux équations à deux inconnues. Alors, on considère un système de deux équations linéaires. Par exemple:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 4 \\ 6x_1 - 2x_2 & = & 8\,. \end{array} \tag{0.1}$$

Est-ce qu'il existe une solution, et si oui, est-elle unique ?

Dans le cas de deux variables, on peut répondre à ces questions facilement au moyen de la géométrie. À cette fin, les équations (0.1) sont transformées comme suit :

$$x_2 = -x_1 + 4, \quad x_2 = 3x_1 - 4\,. \tag{0.2}$$

Chaque équation décrit une droite dans le plan (x_1,x_2). Alors, la solution commune de ces deux équations est le point d'intersection $(x_1,x_2) = (2,2)$ des deux droites, voir figure 0.1. On peut bien sûr résoudre (0.2) sans géométrie : De

$$-x_1 + 4 = x_2 = 3x_1 - 4$$

on obtient $4x_1 = 8$ et ainsi $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Évidemment, le système suivant n'a pas de solution :

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - 2x_2 & = & -2 \\ 2x_1 - x_2 & = & 4\,. \end{array} \tag{0.3}$$

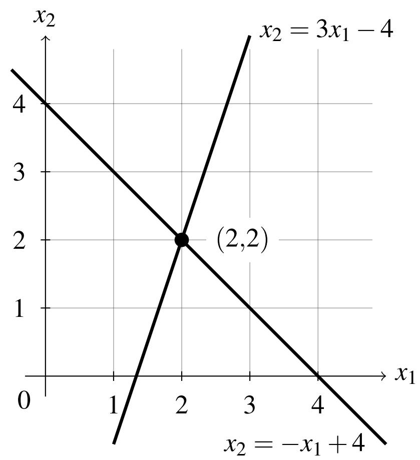

FIG. 0.1 – Interprétation géométrique de (0.2) : La solution est donnée par le point d'intersection.

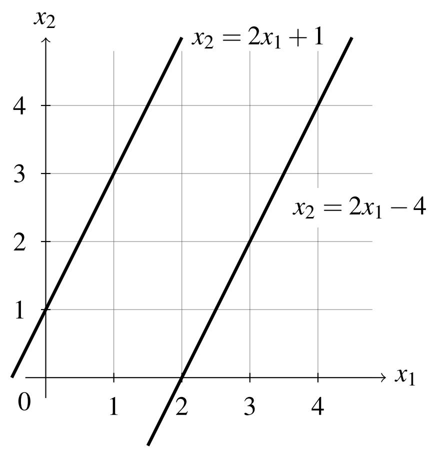

FIG. 0.2 – Interprétation géométrique de (0.3) : Les deux droites sont parallèles et ainsi, il n'existe pas de solution.

Les droites correspondantes sont parallèles, voir figure 0.2.

Au contraire, le système suivant admet une infinité de solutions :

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - 2x_2 &=& 8 \\ 2x_1 - x_2 &=& 4 \end{array} \tag{0.4}$$

parce que la première équation est égale à la deuxième multipliée par 2. L'ensemble des solutions est la droite $x_2 = 2x_1 - 4$ dans la figure 0.2.

Les exemples (0.3) et (0.4) sont exceptionnels. Un système de deux équations linéaires à deux inconnues a presque toujours une seule solution.

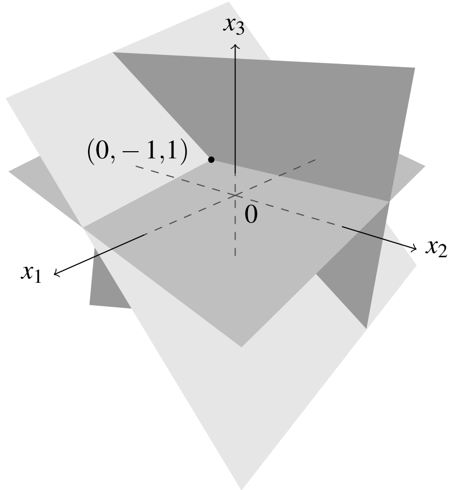

FIG. 0.3 – Interprétation géométrique de (0.5) : La solution est le point d'intersection des trois plans.

Trois équations à trois inconnues. On considére le systéme suivant :

$$\begin{array}{rrrcr} x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1+ & 4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ 4x_1+ & 2x_2+ & x_3 & = & -1 \end{array} \quad . \tag{0.5}$$

Chaque équation décrit un plan dans $\mathbb{R}^3$, voir figure 0.3. Avec de la chance, on peut voir que le point d'intersection de ces trois plans est $(x_1,x_2,x_3) = (0,-1,1)$.

Pour calculer la solution de (0.5), on pourrait procéder comme pour les équations (0.1) et éliminer des variables. Mais cela devient rapidement compliqué et brouillon pour trois variables ou plus. Il faut une procédure systématique ! À cette fin, on soustrait la première équation multipliée par 3 (resp. 4) de la deuxième (resp. la troisième), ce qui donne

$$\begin{array}{c|rrrcr} & 1x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ 4 \quad 3 & 3x_1+ & 4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ & 4x_1+ & 2x_2+ & x_3 & = & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrcr} 1x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ & -8x_2+ & 4x_3 & = & 12 \\ & -14x_2- & 15x_3 & = & -1 \end{array} \quad .$$

Les multiplicateurs ont été choisis dans le but d'éliminer x_1 de la deuxième et la troisième équations. Alors, on élimine la variable x_2 dans la troisième équation en lui soustrayant la deuxième équation multipliée par $7/4$:

$$\begin{array}{c|rrrcr} & 1x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ \frac{7}{4} & & -8x_2+ & 4x_3 & = & 12 \\ & & -14x_2- & 15x_3 & = & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrcr} 1x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ & -8x_2+ & 4x_3 & = & 12 \\ & & -22x_3 & = & -22 \end{array} \quad .$$

Cette forme réduite permet de resoudre les équations « de bas en haut ». La dernière équation $-22x_3 = -22$ donne $x_3 = 1$. En substituant dans la deuxième équation on obtient $-8x_2 + 4 \cdot 1 = 12$ et ainsi $x_2 = -1$. En substituant les valeurs connues de x_1,x_2 dans la première équation on obtient $x_1 + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 0$, c'est-à-dire $x_1 = 0$. Ainsi, $(x_1,x_2,x_3) = (0,-1,1)$ est la solution de (0.5).

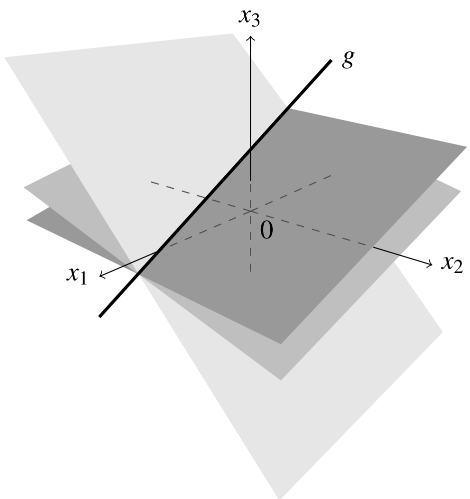

FIG. 0.4 – Interprétation géométrique de (0.6) : L'intersection de trois plans est une droite, qui répresente toutes les solutions de (0.6).

Il n'est pas difficile de construire des systèmes à trois inconnues qui n'ont pas de solution ou qui admettent une infinité de solutions. Par exemple :

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_1+ & 4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ 6x_1+ & x_2+ & 25x_3 & = & 24 \\ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0\,. \end{array} \tag{0.6}$$

L'intersection des trois plans determinés par les trois équations est une droite au lieu d'un point. Tous les points de cette droite sont des solutions de (0.6). Pour les calculer on procède par analogie avec (0.5). En soustrayant la première équation multipliée par 2 à la deuxieme on obtient

$$\begin{array}{rrcl} 3x_1+4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ -7x_2- & 7x_3 & = & 0 \\ 4x_2+ & 4x_3 & = & 0\quad. \end{array}$$

La troisème équation est redondante en étant équivalente à la deuxième. On choisit comme paramètre libre x_3 et obtient $x_2 = -x_3$. En substituant dans la première équation on obtient $3x_1 - 4x_3 + 16x_3 = 12$, ainsi $x_1 = 4 - 4x_3$. Alors, l'ensemble des solutions est donné par $(4-4x_3, -x_3, x_3)$, qui est la droite g dans la figure 0.4.

Autant d'équations, autant d'inconnues. Comme nous le verrons plus loin, on peut généraliser les observations ci-dessus aux systèmes de m équations linéaires à n inconnues, avec m et n entiers naturels. Cependant avant cela, nous allons introduire des matrices, qui nous permettent de traiter les systèmes linéaires de manière plus élégante.