file/beamerfontthememetropolis.sty/before
file/beamerfontthememetropolis.sty/after

Présentation Cours "pensée mathématique : entre rigueur et créativité" 2023

Maurice Mischler

2023

Jour 1 : Logique

Un des buts était d'exprimer les principaux raisonnements. Par exemple, nous avons démontré les raisonnements suivants :

1.	$(p \to q)\,,\ p$	$\models$	q	*(modus ponens)*
2.	$(p \to q)\,,\ \neg q$	$\models$	$\neg p$	*(modus tollens)*
3.	$(p \to \neg q)\,,\ q$	$\models$	$\neg p$	*(modus ponendo ponens)*
4.	$(\neg p \to \neg q)\,,\ q$	$\models$	p	
5.	$(p \to \perp)$	$\models$	$\neg p$	
6.	$(\neg p \to \perp)$	$\models$	p	*(démonstration par l'absurde)*
7.	$(p \to r)\,,\ (p \to \neg r)$	$\models$	$\neg p$	
8.	$(\neg p \to r)\,,\ (\neg p \to \neg r)$	$\models$	p	
9.	$(p \to q)\,,\ (q \to r)$	$\models$	$(p \to r)$	*(modus barbara)*
10.	$(p \vee q)\,,\ (p \to s)\,,\ (q \to t)$	$\models$	$(s \vee t)$	
11.	$(p \vee q)\,,\ (p \to s)\,,\ (q \to s)$	$\models$	s	
12.	$(p \to s)\,,\ (\neg p \to t)$	$\models$	$(s \vee t)$	
13.	$(p \to s)\,,\ (\neg p \to s)$	$\models$	s	
14.	$(p \to q)\,,\ ((q \wedge r) \to s)$	$\models$	$(p \wedge r) \to s$	

Jour 1 : Logique

Il existe a et b des nombres irrationnels (non nécessairement distincts) tels que a^b soit rationnel.

Considérons le nombre $c := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. De deux chose l'une : ou bien ce nombre est rationnel, ou bien il ne l'est pas. S'il est rationnel, le résultat qu'on se propose de montrer est démontré, en posant $a = b = \sqrt{2}$. S'il n'est pas rationnel, alors en posant $a = c$ et $b = \sqrt{2}$, on a $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^2 = 2$ qui est un nombre rationnel (c'est $\frac{2}{1}$). Donc les résultat est vrai aussi.[1] C'est un raisonnement du type

$$(p \to s)\,,\,(\neg p \to s) \models s$$

[1] Remarquons, qu'avec un gros théorème du nom de *Théorème de Gelfond-Schneider*, on sait que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, même transcendant.

Jour 2 : Ensemble

(1) **Axiome d'extentionalité :** deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments. On le traduira ainsi (mais cela demandera quelques explications) :

$$\forall A, B\ (A = B) \iff (\forall x,\ x \in A \iff x \in B).$$

(2) **Axiome de spécification :** si S est un prédicat de rang quelconque mais libre en x et si A est un ensemble. Alors l'ensemble des éléments de A pour lesquels S est vrai, est aussi un ensemble. On le nomme

$$\{x \in A \mid S(x)\}.$$

(3) **Axiome de la paire :** si A et B sont des ensembles, il existe un nouvel ensemble qui contient comme uniques éléments A et B. On le note souvent $\{A, B\}$.

Jour 2 : Ensemble

(4) **Axiome de l'union :** si A et B sont deux ensembles, alors l'ensemble $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ existe. Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une collection d'ensembles, alors il existe un ensemble U tel que $U = \{x \mid x \in X \text{ pour un } X \text{ dans } \mathcal{C}\}$. On note $U = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

(5) **Axiome de puissance :** Pour tout ensemble A, il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(A)$ qui possède pour éléments tous les sous-ensembles de A. Autrement dit, $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ existe.

(6) **Axiome de l'infini :** Si X est un ensemble, on définit X^+, le *successeur de* X, comme étant l'ensemble $X \cup \{X\}$ qui existe en vertu des axiomes (3) et (4). Il existe un ensemble contenant l'ensemble vide et le successeur de chacun de ses éléments. Le plus petit ensemble possédant ces propriétés se note $\mathbb{N}$.

Jour 2 : Ensemble

Avec ces 6 axiomes, nous pouvons exposer

- Le paradoxe de Russel,

Jour 2 : Ensemble

Avec ces 6 axiomes, nous pouvons exposer

- Le paradoxe de Russel,
- Le principe de récurrence,

Jour 2 : Ensemble

Avec ces 6 axiomes, nous pouvons exposer

- Le paradoxe de Russel,
- Le principe de récurrence,
- Le produit cartésien, les relations (en particuliers, les relations d'ordres et d'équivalences),

Jour 2 : Ensemble

Avec ces 6 axiomes, nous pouvons exposer

- Le paradoxe de Russel,
- Le principe de récurrence,
- Le produit cartésien, les relations (en particuliers, les relations d'ordres et d'équivalences),
- Les applications,

Jour 2 : Ensemble

Avec ces 6 axiomes, nous pouvons exposer

- Le paradoxe de Russel,
- Le principe de récurrence,
- Le produit cartésien, les relations (en particuliers, les relations d'ordres et d'équivalences),
- Les applications,
- La définition des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et même $\mathbb{R}$, mais on ne peut pas démontrer facilement que c'est l'unique corps ordonné satifaisant le principe de la borne inférieur (Hilbert !) .

Jour 3 : Arithmétique

Nous avons vu les résultat suivants :

- les résultats sur la divisibilité (lemme de Gauss, théorème fondamental de l'arithmétique, algorithme d'Euclide, Théorème de Bézout,

Journée considérée comme difficile !

Jour 3 : Arithmétique

Nous avons vu les résultat suivants :

- les résultats sur la divisibilité (lemme de Gauss, théorème fondamental de l'arithmétique, algorithme d'Euclide, Théorème de Bézout,
- les triplets pythagoriciens

Journée considérée comme difficile !

Jour 3 : Arithmétique

Nous avons vu les résultat suivants :

- les résultats sur la divisibilité (lemme de Gauss, théorème fondamental de l'arithmétique, algorithme d'Euclide, Théorème de Bézout,
- les triplets pythagoriciens
- le théorème chinois

Journée considérée comme difficile !

Jour 3 : Arithmétique

Nous avons vu les résultat suivants :

- les résultats sur la divisibilité (lemme de Gauss, théorème fondamental de l'arithmétique, algorithme d'Euclide, Théorème de Bézout,
- les triplets pythagoriciens
- le théorème chinois
- le petit théorème de Fermat, l'indicateur d'Euler

Journée considérée comme difficile !

Jour 3 : Arithmétique

Nous avons vu les résultat suivants :

- les résultats sur la divisibilité (lemme de Gauss, théorème fondamental de l'arithmétique, algorithme d'Euclide, Théorème de Bézout,
- les triplets pythagoriciens
- le théorème chinois
- le petit théorème de Fermat, l'indicateur d'Euler
- le cryptage RSA

Journée considérée comme difficile !

Jour 3 : Arithmétique

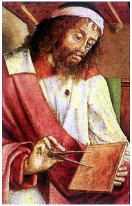
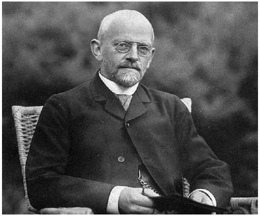
Nous avons vu les résultat suivants :

- les résultats sur la divisibilité (lemme de Gauss, théorème fondamental de l'arithmétique, algorithme d'Euclide, Théorème de Bézout,
- les triplets pythagoriciens
- le théorème chinois
- le petit théorème de Fermat, l'indicateur d'Euler
- le cryptage RSA
- les fractions continues.

Journée considérée comme difficile !

Jour 4 : Géométrie

Euclide vs Hilbert vs Dieudonné


Jour 4 : Géométrie

J'ai choisi Hilbert !

Jour 5 : Equations aux différences

Considérons l'équation homogène suivante :

$$a_n \cdot y(t+n) + a_{n-1} \cdot y(t+n-1) + \cdots + a_0 \cdot y(t) = 0,$$

Avec $a_i \in \mathbb{R}$. Posons $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, le polynôme caractéristique. Supposons que

$$F(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{l} (x-\mu_j)^{\beta_j} (x-\overline{\mu_j})^{\beta_j},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $\mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pour $j = 1, \ldots, l$. Supposons que $\mu_j = r_j \cdot (\cos(\varphi_j) + i \cdot \sin(\varphi_j))$. Alors

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} A_{ij} \cdot t^j \cdot \lambda_i^t + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{\beta_i - 1} t^j \cdot r_i^t \cdot (B_{ij} \sin(\varphi_i \cdot t) + C_{ij} \cos(\varphi_i \cdot t)),$$

avec les $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$.

Jour 5 : Equations aux différences

Exemples :

- La suite de Fibonnaci : $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ et $y(n+1) = y(n) + y(n-1)$. En posant $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - \Phi'^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - (-\Phi^{-1})^n).$$

Jour 5 : Equations aux différences

Exemples :

- La suite de Fibonnaci : $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ et $y(n+1) = y(n) + y(n-1)$. En posant $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - \Phi'^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - (-\Phi^{-1})^n).$$

- le nombre de plages dans un cercle définies par des points sur la circonférence en position non spéciale. On voit que $y(0) = y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $y(3) = 4$. Et plus généralement

$$y(n+1) = y(n) + \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot (n-i) + 1$$

Jour 5 : Equations aux différences

Exemples :

- La suite de Fibonnaci : $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ et $y(n+1) = y(n) + y(n-1)$. En posant $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - \Phi'^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - (-\Phi^{-1})^n).$$

- le nombre de plages dans un cercle définies par des points sur la circonférence en position non spéciale. On voit que $y(0) = y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $y(3) = 4$. Et plus généralement

$$y(n+1) = y(n) + \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot (n-i) + 1$$

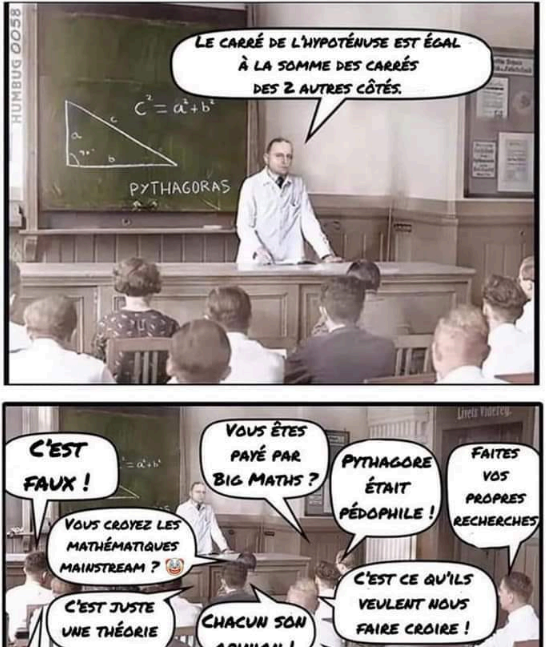
- donc, on a, en résolvant que

$$y(n) = \frac{n^4 - 6 \cdot n^3 + 23 \cdot n^2 - 18 \cdot n + 24}{24}$$

Friandises pour la fin : les défis

C'est presque ce qui a le mieux marché !!
en voici un :
Considérons un échiquier de taille 2^n sur 2^n auquel on enlève une case arbitraire. Montrer qu'il est possible de couvrir l'échiquier avec des tuiles en forme de L (une seule tuile recouvre 3 cases en tout). (Indication, faites une récurrence sur n)

Merci !!



HUMBUG 0058
LE CARRÉ DE L'HYPOTÉNUSE EST ÉGAL À LA SOMME DES CARRÉS DES 2 AUTRES CÔTÉS.
$c^2 = a^2 + b^2$
PYTHAGORAS
C'EST FAUX !
VOUS ÊTES PAYÉ PAR BIG MATHS ?
PYTHAGORE ÉTAIT PÉDOPHILE !
FAITES VOS PROPRES RECHERCHES
VOUS CROYEZ LES MATHÉMATIQUES MAINSTREAM ? 🤡
C'EST CE QU'ILS VEULENT NOUS FAIRE CROIRE !
C'EST JUSTE UNE THÉORIE
CHACUN SON