

5à7- Mathématiques

Zsolt Patakfalvi

22 novembre 2023



Programme 5 à 7 – 22 novembre 2023

- Contenu et examens des cours de 1^{ère} année
- Nouvelle maturité: T. Mantuano
- Summer School de math: M. Mischler

Apéro dinatoire

2023-2024

GÉNIE MÉCANIQUE

Cycle Propédeutique

validé par la Vice-présidence académique le 15 juin 2023

CODE	MATIERES	TYPE DE BRANCHE	ENSEIGNANTS sous réserve de modification	SEMESTRES						COEFF.	EXAMENS *		
				BA1			BA2				HIVER	ETE	FORME
				c	e	p	c	e	p				
Bloc 1										30			
MATH-111(c)	Algèbre linéaire	ou	Polytechnique	Pouchon						6	H		écrit
MATH-111(en)	Algèbre linéaire (anglais)	ou		Iseli	4	2							
MATH-111(pi)	Algèbre linéaire (classe inversée)			Testerman									
MATH-101(c)	Analyse I	ou	Polytechnique	Friedli						6	H		écrit
MATH-101(de)	Analyse I (allemand)	ou		Schmid									
MATH-101(en)	Analyse I (anglais)	ou		Mountford	4	2							
MATH-101(pi)	Analyse I (classe inversée)	ou		Garin									
MATH-101(ol)	Analyse I (online)			Friedli									
MATH-106(b)	Analyse II	ou	Polytechnique	Mila			4	2		6		E	écrit
MATH-106(en)	Analyse II (anglais)			Richter									
PHYS-101(d)	Physique générale : mécanique	ou	Polytechnique	Muellhaupt						6	H		écrit
PHYS-101(en)	Physique générale : mécanique (anglais)	ou		Ball	3	3							
PHYS-101(l)	Physique générale : mécanique (classe inversée)			Hébert									
PHYS-106(d)	Physique générale : thermodynamique	ou	Polytechnique	Bréchet						6		E	écrit
PHYS-106(en)	Physique générale : thermodynamique (anglais)	ou		Hirschmann			3	3					
PHYS-106(pi)	Physique générale : thermodynamique (pas donné en 2023-24) (classe inv			Rahi									

Effectif: 2085 étudiant.es

Moyenne: 4.15

Médiane: 4.5

80% QCM et 20% partie ouverte

Systèmes linéaires

Algèbre matricielle

Espaces vectoriels

Bases et dimension

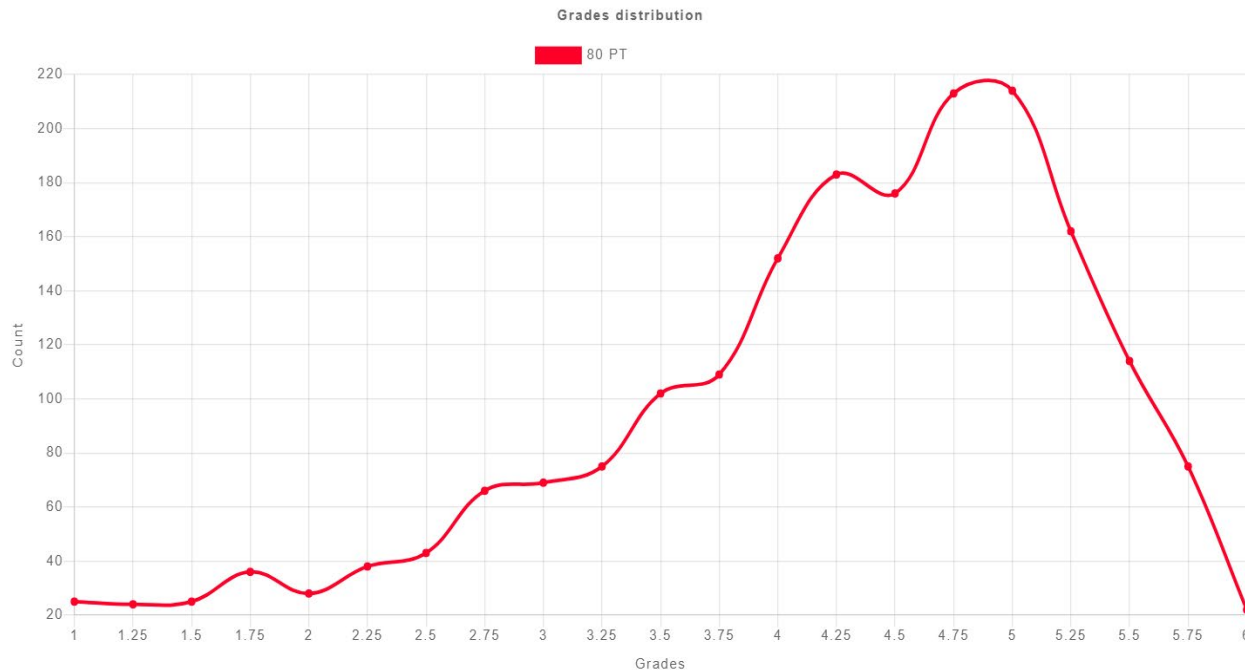
Applications linéaires

Déterminant

Valeurs/vecteurs propres et diagonalisation

Produits scalaires et espaces euclidiens

Matrices orthogonales et matrices symétriques



Question [SCQ-common-08] : Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = (1, t + t^2, t - t^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de $\mathbb{P}_2$ et $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question discriminatoire :
(27% top students VS 27%
lower students)



Question [SCQ-common-04] : L'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

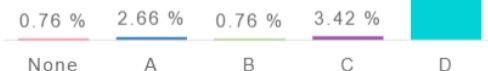
☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

☒ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Question facile

92.4 %



Question [TF-common-02] : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-common-13] : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et soient w_1 et w_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Si les vecteurs w_1 et w_2 sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\text{proj}_V(w_1)$ et $\text{proj}_V(w_2)$ sont linéairement indépendants.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-common-11] : Soient A et P deux matrices de taille $n \times n$. Si $P^T A P$ est symétrique, alors A est symétrique.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-common-02] : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI ☒ FAUX

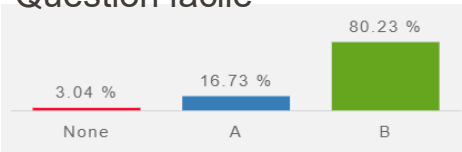
Question [TF-common-13] : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et soient w_1 et w_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Si les vecteurs w_1 et w_2 sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\text{proj}_V(w_1)$ et $\text{proj}_V(w_2)$ sont linéairement indépendants.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-common-11] : Soient A et P deux matrices de taille $n \times n$. Si $P^T A P$ est symétrique, alors A est symétrique.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question facile



Question [TF-common-02] : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI ☒ FAUX

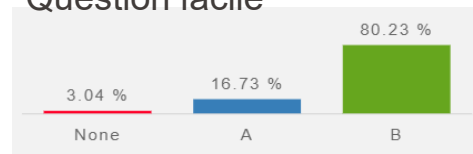
Question [TF-common-13] : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et soient w_1 et w_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Si les vecteurs w_1 et w_2 sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\text{proj}_V(w_1)$ et $\text{proj}_V(w_2)$ sont linéairement indépendants.

☐ VRAI ☒ FAUX

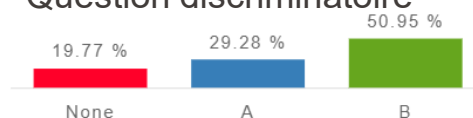
Question [TF-common-11] : Soient A et P deux matrices de taille $n \times n$. Si $P^T A P$ est symétrique, alors A est symétrique.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question facile



Question discriminatoire



Question [TF-common-02] : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI ☒ FAUX

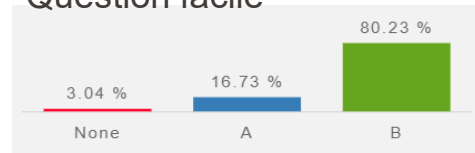
Question [TF-common-13] : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et soient w_1 et w_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Si les vecteurs w_1 et w_2 sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\text{proj}_V(w_1)$ et $\text{proj}_V(w_2)$ sont linéairement indépendants.

☐ VRAI ☒ FAUX

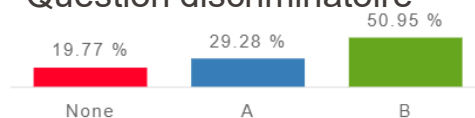
Question [TF-common-11] : Soient A et P deux matrices de taille $n \times n$. Si $P^T A P$ est symétrique, alors A est symétrique.

☐ VRAI ☒ FAUX

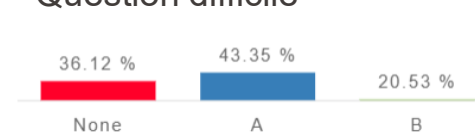
Question facile



Question discriminatoire



Question difficile



Effectif: 2211 étudiant.es

Moyenne: 4.17

Médiane: 4.5

80% QCM et 20% partie ouverte

Raisonner, démontrer et argumenter
mathématiques

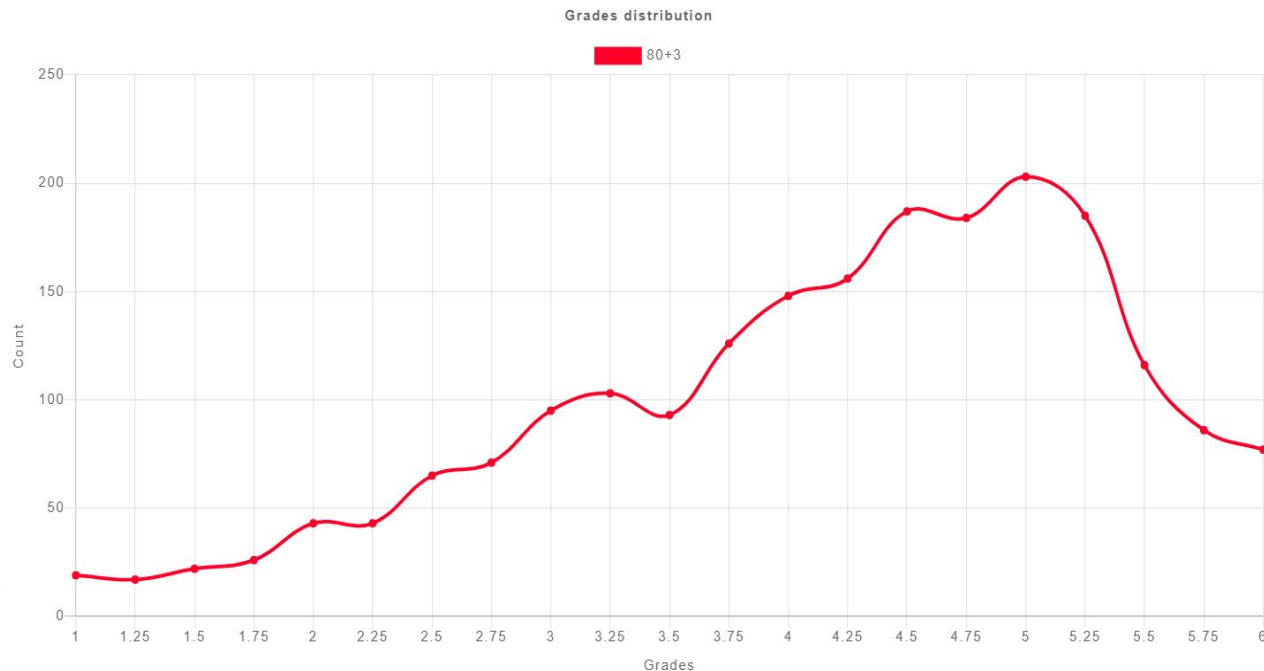
Nombres, structures et fonctions

Suites, limites et continuité

Séries numériques

Fonctions réelles et processus de limite

Derivées et intégrales



Question [SCQ-limite-prolongmt-B] : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \sin(ax + b) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

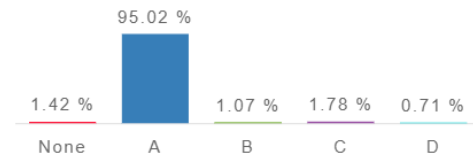
☒ $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{4}$

☐ $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = 0$

☐ $a = 0$ et $b = -\frac{\pi}{4}$

☐ $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$

Question facile



Question [SCQ-serie-entiere-A] : Soit $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

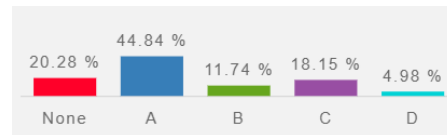
☒ vaut 1

☐ est infini

☐ vaut 0

☐ vaut $\frac{1}{2}$

Question discriminatoire

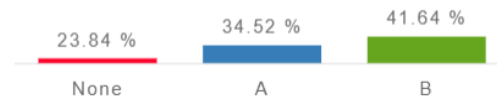


Question [TF-derivabilite-discussion-A] : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

☒ VRAI

☐ FAUX

Question difficile

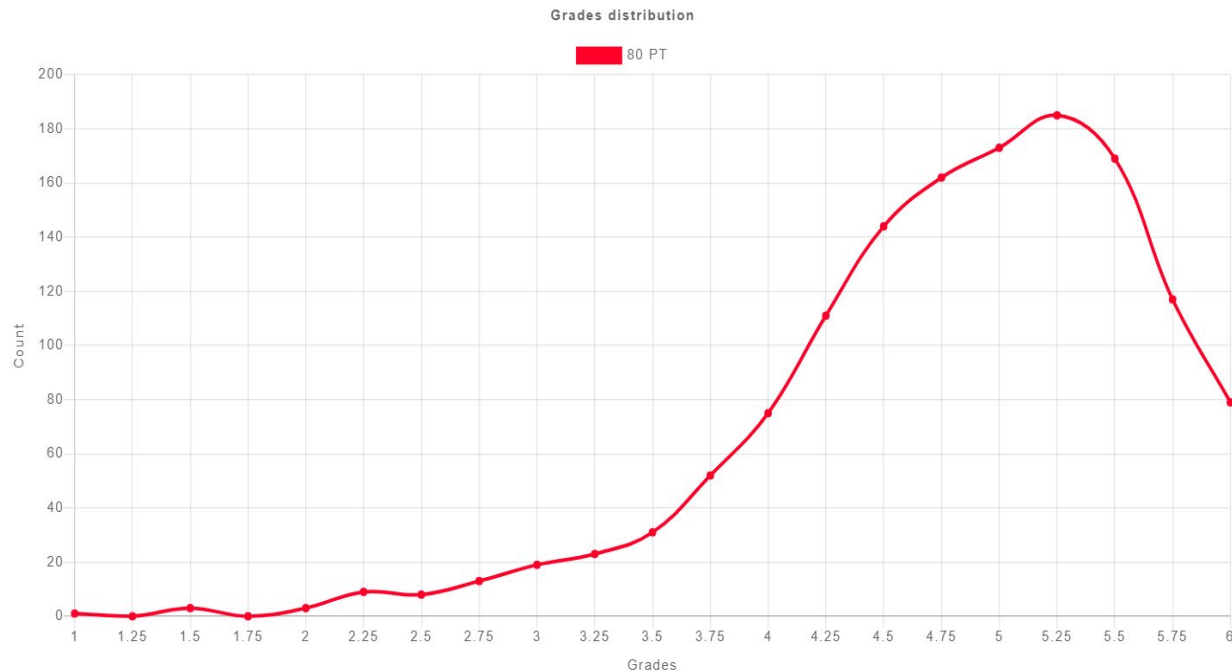


Effectif: 1400 étudiant.es

Moyenne: 4.81

Médiane: 5.00

80% QCM et 20% partie ouverte



L'espace $\mathbb{R}^n$

Calcul différentiel des fonctions à plusieurs variables

Intégrales multiples

Équations différentielles ordinaires

Méthodes de démonstration et arguments

mathématiques

Code	Matières	Type de branche	Enseignants sous réserve de modification	Sections	Semestres						Coeff.	Période des épreuves *	Type examen *
					BA1			BA2					
					c	e	p	c	e	p			
	Bloc 1										41		
MATH-110(a)	Algèbre linéaire avancée I	Polytechnique	Michel	MA	4	3					7	H	écrit
MATH-115(a)	Algèbre linéaire avancée II	Spécifique	Eisenbrand	MA				4	3		7	E	écrit
MATH-100(a)	Analyse avancée I	Polytechnique	Monod	MA	4	4					8	H	écrit
MATH-105(a)	Analyse avancée II	Polytechnique	Nobile	MA				4	4		8	E	écrit
PHYS-101(f)	Physique générale : mécanique	Polytechnique	Blanc F.	PH	3	3					6	H	écrit
PHYS-108	Physique générale : fluides et électromagnétisme	Spécifique	Theiler	PH				3	2		5	E	écrit
	Bloc 2										20		
MATH-260(a)	Discrete mathematics	Spécifique	Viazovska	MA				2	2		4	E	écrit
HUM-1nn	Enjeux mondiaux	Polytechnique	divers enseignants	CDH				2			2	sem P	
CS-119(d)	Information, calcul, communication	Polytechnique	Chappelier	IN	3	3					6	sem A	
CS-112(g)	Programmation orientée objet	Spécifique	Chappelier	IN				1		2	4	sem P	
MATH-113	Structures algébriques	Spécifique	Patakfalvi	MA	2	2					4	H	écrit
	Totaux :				16	15	0	16	11	2			
	Totaux par semaine :				31			29			61		

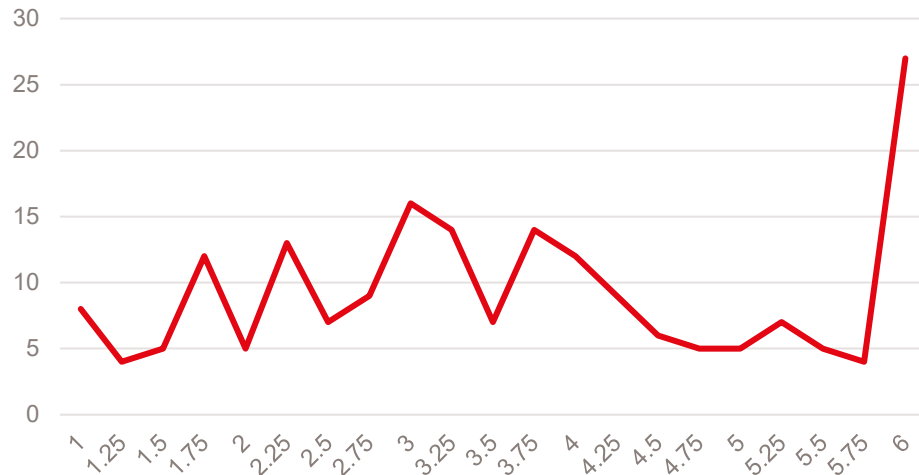
Effectif: 206 étudiant.es

Moyenne: 3.63

Médiane: 3.5

6 exercices (mix calculatoires et théoriques)

Analyse avancée I



Exercice 3. Calculer les expressions ci-dessous.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+8)}$

(iii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+4}{n(n^2-4)}$

(iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{(n+3)(n+6)} \right)$

Exercice 4. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable, soit $c > 0$ et supposons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$.
Est-ce que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$? Justifiez votre réponse en détail.

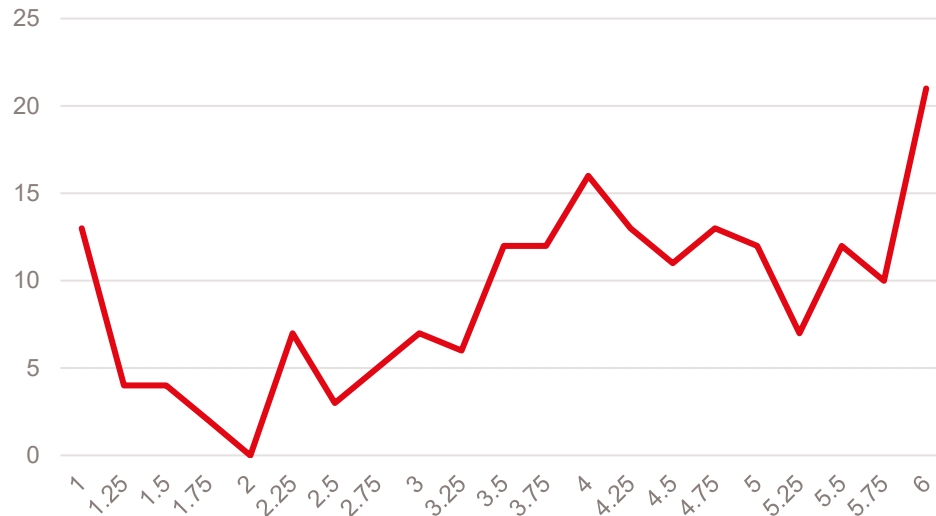
Exercice 5. Soit $f \in C^1(\mathbf{R})$ telle que $f'(x) \geq x^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Prouver qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = x$.

Effectif: 200 étudiant.es

Moyenne: 4.05

Médiane: 4.25

Algèbre linéaire avancée I



Effectif: 120 étudiant.es

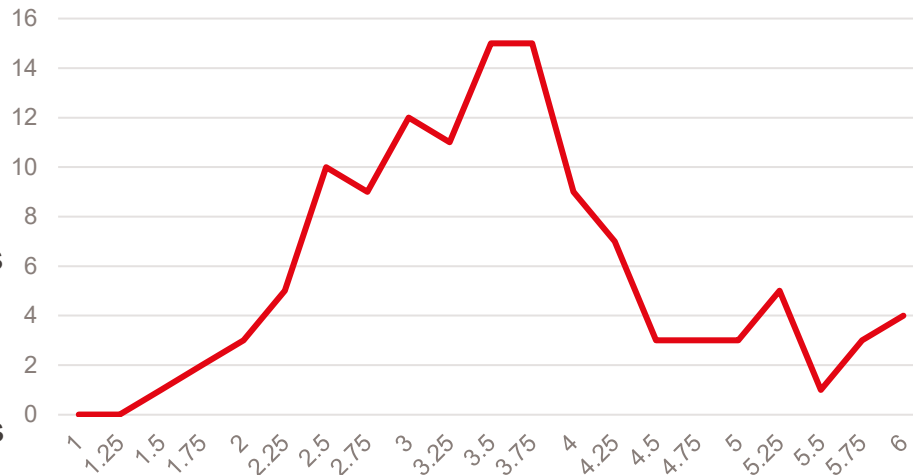
Moyenne: 3.59

Médiane: 3.5

8 QCM et 7 questions ouvertes (5 calculatoires et 2 preuves)

Les étudiant.es n'ont pas rempli le QCM et très mal fait les preuves (qui étaient vues en classe).

Analyse avancée II



Question 11: Cette question est notée sur 8 points.

Soit $f(x, y, z) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$.

- Discuter la nature des points stationnaires de f .
- Déterminer, s'ils existent, tous les minima et maxima locaux et globaux de f .



Question facile, calculatoire
Bien réussie

Question 13: Cette question est notée sur 8 points.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1\}$. Calculer l'intégrale double

$$I = \int_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy$$

en utilisant le changement de variables $(x, y) = (u^4, v^4)$.



Question pas bien réussie.

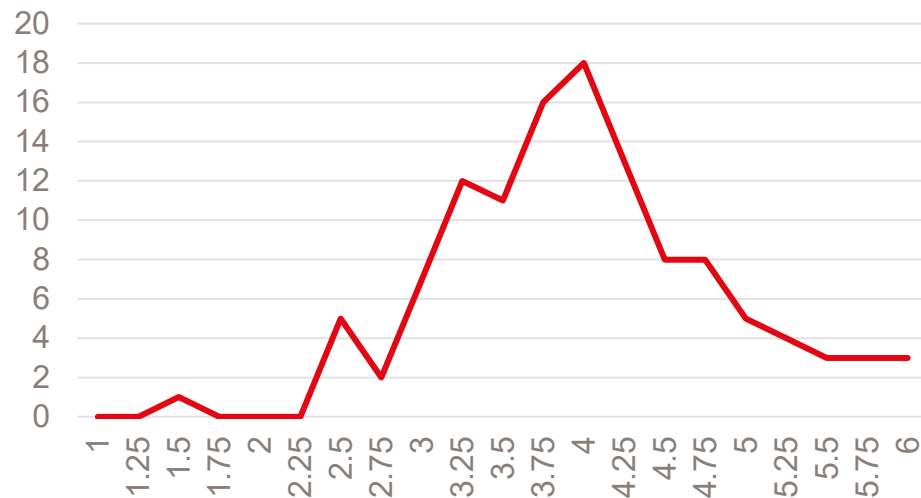
- pas transformé correctement le domaine d'intégration
- pas d'intuition géométrique
- Pas la bonne formule du changement de variables

Effectif: 120 étudiant.es

Moyenne: 4.01

Médiane: 4

Algèbre linéaire avancée II



EPFL



Merci

Question 29: Cette question est notée sur 7 points.

0 1 2 3 4 5 6 7

Réservé au correcteur

Soient $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x)$.

(b) Montrer que $\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh(x)^2}$.

(c) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \log(\tanh(x))$, en justifiant toutes les étapes de votre raisonnement.