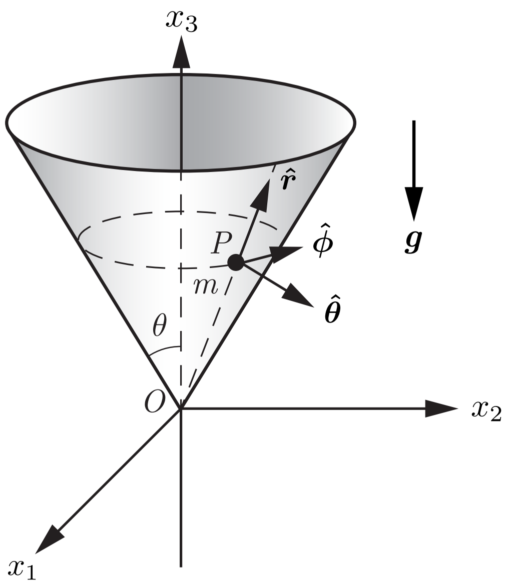
1. Cône avec frottement (6/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un point matériel P de masse m est astreint à se déplacer sur la surface intérieure d'un cône fixe. On considère que le point matériel est soumis à une force de frottement visqueux en régime laminaire,

$$\boldsymbol{F}_f = -\,\lambda\,\boldsymbol{v}$$

qui est une fonction linéaire de sa vitesse $\boldsymbol{v}$ et du coefficient de frottement $\lambda > 0$. Le temps d'amortissement dû au frottement est défini comme,

$$\tau = \frac{m}{\lambda}$$

Le sommet du cône se situe à l'origine O du repère cartésien fixe $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$. L'axe de symétrie du cône est la droite verticale passant par O et son angle d'ouverture est $\theta = \text{cste}$. Pour décrire la dynamique du point matériel P, on prend un repère sphérique mobile $(P, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ attaché au point matériel P, tel que les vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sont contenus dans un plan vertical et le vecteur de base $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ est horizontal.

Les réponses doivent être exprimées en termes des coordonnées sphériques r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, de la masse m, du coefficient de frottement λ, du temps d'amortissement τ, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, de la norme du champ gravitationnel g, du temps t et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Exprimer la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f$ et le poids $\boldsymbol{P}$ en coordonnées sphériques.

   Le point matériel P a pour contrainte géométrique de se déplacer sur la surface du cône,
   $$\theta = \text{cste} \qquad \text{ainsi} \qquad \dot{\theta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} = 0 \tag{1}$$
   Compte tenu de la contrainte géométrique (1), la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f$ s'écrit en coordonnées sphériques comme,
   $$\boldsymbol{F}_f = -\lambda\,\boldsymbol{v} = -\lambda\,\dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} - \lambda\,r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{2}$$
   et le poids est donné par,
   $$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 = mg\left(-\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{3}$$

2. (**1.0 point**) Déterminer la force de réaction normale du cône $\boldsymbol{N}$ en coordonnées sphériques à l'aide de la loi du mouvement.

   La force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ du cône est orthogonale au plan tangent au cône contenant le point matériel P. Elle s'écrit donc en coordonnées sphériques comme,
   $$\boldsymbol{N} = -\,N\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{4}$$
   Compte tenu de la contrainte géométrique (1), l'accélération absolue du point matériel P est donnée en coordonnées sphériques par,
   $$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{5}$$
   La loi vectorielle du mouvement du point matériel s'écrit,
   $$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_f = m\,\boldsymbol{a} \tag{6}$$
   En substituant les expressions du poids (3), de la réaction normale du cône (4), de la force de frottement visqueux (2) et de l'accélération (5) dans la loi vectorielle du mouvement (6), et en la projetant le long des lignes de coordonnées cylindriques, on obtient les trois équations scalaires suivantes,
   $$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{r}}:\quad -\,mg\cos\theta - \lambda\,\dot{r} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) \tag{7}$$
   $$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}:\quad mg\sin\theta - N = m\left(-\,r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) \tag{8}$$
   $$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}:\quad -\,\lambda\,r\dot{\phi}\sin\theta = m\left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right) \tag{9}$$
   Compte tenu de l'équation du mouvement nodal (8), la force de réaction normale (4) est mise sous la forme,
   $$\boldsymbol{N} = m\left(g\sin\theta + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10}$$

3. (**0.5 point**) Montrer explicitement que le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ du point matériel P évalué à l'origine O s'écrit,
   $$\boldsymbol{L}_O = L_O\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\,mr^2\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
   Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ est défini comme,
   $$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \tag{11}$$
   Compte tenu de la contrainte géométrique (1), le moment cinétique (11) s'écrit en coordonnées sphériques comme,
   $$\boldsymbol{L}_O = mr\,\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\cancel{\dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}}} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = -\,mr^2\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{12}$$

4. (**0.5 point**) Montrer explicitement que l'équation du mouvement azimutal, c'est-à-dire selon le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, peut être mise sous la forme,

$$2\,\frac{dr}{r}+\frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}}=-\,\frac{dt}{\tau}$$

L'équation du mouvement azimutal (9) peut être divisée par m et $\sin\theta$ car $\theta>0$. Ainsi, compte tenu du temps d'amortissement $\tau=\frac{m}{\lambda}$, elle peut être mise sous la forme,

$$2\,\frac{\dot{r}}{r}+\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}=-\,\frac{1}{\tau} \tag{13}$$

Compte tenu des dérivées temporelles,

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}\quad\text{et}\quad\ddot{\phi}=\frac{d\dot{\phi}}{dt} \tag{14}$$

l'équation du mouvement azimutal (13) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal dt s'écrit,

$$2\,\frac{dr}{r}+\frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}}=-\,\frac{dt}{\tau} \tag{15}$$

5. (**1.0 point**) A l'aide des résultats des deux questions précédentes, compte tenu des conditions initiales $r(0)=r_0$ et $\dot{\phi}(0)=\dot{\phi}_0$, déterminer l'évolution temporelle de la composante $L_O(t)$ du moment cinétique du point matériel évalué à l'origine O. *Indication : intégrer l'équation différentielle et utiliser l'identité logarithmique :* $\lambda\ln(a)+\ln(b)=\ln\left(a^{\lambda}b\right)$

L'intégration formelle de l'équation différentielle (15) du temps initial $t=0$ au temps t s'écrit,

$$2\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{dr'(t')}{r'(t')}+\int_{\dot{\phi}(0)}^{\dot{\phi}(t)}\frac{d\dot{\phi}'(t')}{\dot{\phi}'(t')}=-\,\frac{1}{\tau}\int_0^t dt' \tag{16}$$

Le résultat de l'intégrale (16) est,

$$2\,\ln\left(\frac{r(t)}{r(0)}\right)+\ln\left(\frac{\dot{\phi}(t)}{\dot{\phi}(0)}\right)=\ln\left(\frac{r^2(t)\,\dot{\phi}(t)}{r^2(0)\,\dot{\phi}(0)}\right)=-\,\frac{t}{\tau} \tag{17}$$

Compte tenu des conditions initiales, l'exponentiation de l'équation (17) donne l'évolution suivante,

$$r^2(t)\,\dot{\phi}(t)=r^2(0)\,\dot{\phi}(0)\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)=r_0^2\,\dot{\phi}_0\,\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) \tag{18}$$

Au vu de la loi d'évolution (18), l'évolution de la composante du moment cinétique (12) s'écrit,

$$L_O(t)=-\,m\,r^2(t)\,\dot{\phi}(t)\sin\theta=-\,m\,r_0^2\,\dot{\phi}_0\,\sin\theta\,\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) \tag{19}$$

6. (**0.5 point**) Dans le cas particulier où le mouvement est purement radial, c'est-à-dire $\dot{\phi}=0$, montrer explicitement que l'équation du mouvement radial peut être mise sous la forme,

$$\ddot{r}+\frac{1}{\tau}\,\dot{r}+g\cos\theta=0$$

L'équation du mouvement radial (7) est mise sous la forme suivante,

$$\ddot{r}+\frac{\lambda}{m}\,\dot{r}-\,r\dot{\phi}^2\sin^2\theta+g\cos\theta=0 \tag{20}$$

Pour un mouvement purement radial, la vitesse angulaire est nulle, c'est-à-dire $\dot{\phi}=0$. Compte tenu du temps d'amortissement $\tau=\frac{m}{\lambda}$, l'équation du mouvement radial (20) se réduit à,

$$\ddot{r}+\frac{1}{\tau}\,\dot{r}+g\cos\theta=0 \tag{21}$$

7. (**1.5 point**) A l'aide du résultats établi à la question précédente, compte tenu des conditions initiales $\dot{r}(0) = \dot{r}_0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$, déterminer l'évolution temporelle de la vitesse radiale $\dot{r}(t)$, qui est solution de l'équation du mouvement radial.

L'équation différentielle inhomogène du mouvement radial (21) est mise sous la forme,

$$\ddot{r} + \frac{1}{\tau}\left(\dot{r} + g\tau\cos\theta\right) = 0 \tag{22}$$

Pour rendre l'équation différentielle du mouvement radial (22) homogène, on définit comme nouvelle variable la vitesse radiale relative v_r,

$$v_r = \dot{r} + g\tau\cos\theta \tag{23}$$

Ainsi, l'équation du mouvement radial (22) devient,

$$\dot{v}_r + \frac{1}{\tau}\,v_r = 0 \tag{24}$$

Solution 1 : L'équation du mouvement radial (24) peut être mise sous la forme,

$$\frac{dv_r}{v_r} = -\,\frac{dt}{\tau} \tag{25}$$

Compte tenu la vitesse radiale relative (23) et de la condition initiale $\dot{r}(0) = \dot{r}_0$, l'intégration formelle de l'équation différentielle (25) du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit,

$$\int_{v_r(0)}^{v_r(t)} \frac{dv_r'(t')}{v_r'(t')} = \int_{\dot{r}_0 + g\tau\cos\theta}^{\dot{r}(t)+g\tau\cos\theta} \frac{dv_r'(t')}{v_r'(t')} = -\,\frac{1}{\tau}\int_0^t dt' \tag{26}$$

Le résultat de l'intégrale (26) est,

$$\ln\left(\frac{\dot{r}(t) + g\tau\cos\theta}{\dot{r}_0 + g\tau\cos\theta}\right) = -\,\frac{t}{\tau} \tag{27}$$

L'exponentiation de l'équation (27) donne l'évolution temporelle de la vitesse radiale $\dot{r}(t)$,

$$\dot{r}(t) = \left(\dot{r}_0 + g\tau\cos\theta\right)\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) - \,g\tau\cos\theta \tag{28}$$

Solution 2 : Compte tenu la vitesse radiale relative (23) évaluée au temps initial $t = 0$, la solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre (24) est de la forme,

$$v_r(t) = v_r(0)\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) = \left(\dot{r}_0 + g\tau\cos\theta\right)\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) \tag{29}$$

Ainsi, on obtient l'évolution temporelle de la vitesse radiale $\dot{r}(t)$,

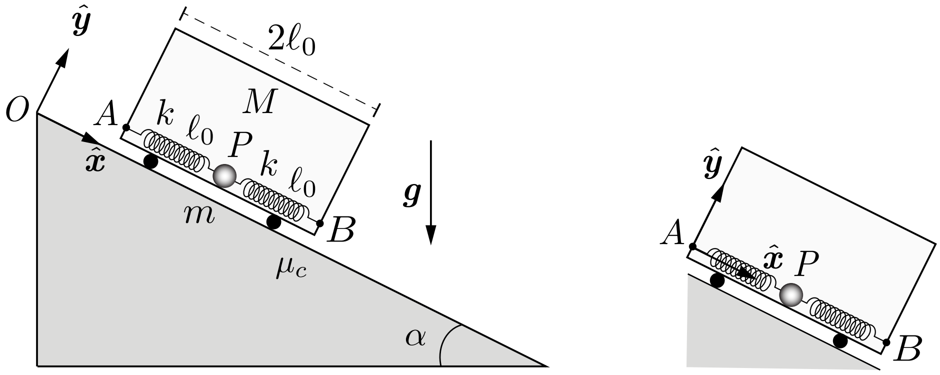
$$\dot{r}(t) = v_r(t) - \,g\tau\cos\theta = \left(\dot{r}_0 + g\tau\cos\theta\right)\exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right) - \,g\tau\cos\theta \tag{30}$$

2. Oscillateur sur plan incliné (7/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un wagon de masse M et de longueur $2\ell_0$ se déplace le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale avec un frottement sec caractérisé par un coefficient de frottement cinétique constant μ_c qui satisfait la condition,

$$\mu_c \geqslant \tan\alpha$$

Un point matériel P de masse m est attaché à deux ressorts identiques de masse négligeable, de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0, fixés aux points A et B sur les parois arrière et avant du wagon respectivement. Le point matériel P peut glisser sans frottement sur le sol du wagon le long du plan incliné. Il a un mouvement relatif rectiligne dans le référentiel relatif du wagon. Le wagon et le point matériel sont soumis au champ gravitationnel terrestre $\boldsymbol{g}$.

Pour décrire la dynamique du système formé du wagon et du point matériel P, on prend un repère cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ attaché à l'origine O choisie au haut du plan incliné. Ce repère est fixe par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du plan incliné. On prend un repère cartésien $(A, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ attaché au point A. Ce repère est mobile par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du plan incliné et fixe par rapport au référentiel accéléré relatif $\mathcal{R}'$ du wagon. Le vecteur position absolue $\boldsymbol{r}_a(A)$ et le vecteur position relative $\boldsymbol{r}_r(P)$ s'écrivent,

$$\boldsymbol{r}_a(A) = \boldsymbol{OA} = X\,\hat{\boldsymbol{x}} + Y\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{où} \qquad Y = \text{cste} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{r}_r(P) = \boldsymbol{AP} = x\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

La masse et le moment d'inertie des roues du wagon sont négligeables. Le mouvement du wagon (c'est-à-dire du point A) peut donc être considéré comme celui d'un point matériel. La masse M du wagon vide est très grande par rapport à la masse m du point matériel, c'est-à-dire $m \ll M$. Dans cette approximation, l'influence du mouvement du point matériel sur le mouvement du wagon est négligeable. Le mouvement du wagon peut donc être étudié en négligeant simplement la masse m du point matériel. La réciproque n'est pas vraie.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la coordonnée cartésienne relative x et de ses dérivées temporelles, du vecteur de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, de la masse m, du coefficient de frottement cinétique μ_c, de la constante élastique k, de la longueur à vide ℓ_0, de l'angle α, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 point**) En négligeant la masse et le mouvement du point matériel P, montrer que l'accélération absolue $\boldsymbol{a}_a(A)$ du point A du wagon s'écrit,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

En négligeant l'influence du point matériel P sur le mouvement du wagon, les forces extérieures exercées sur le wagon sont son poids $\boldsymbol{P}_M$ et la force de réaction normale $\boldsymbol{N}_M$ du plan incliné et la force de frottement cinétique sec $\boldsymbol{F}_f$ à l'interface entre le wagon et le plan,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_M = M\,\boldsymbol{g} = Mg(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}) \\ &\boldsymbol{N}_M = N_M\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &\boldsymbol{F}_f = -\,\mu_c\,N_M\,\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{1}$$

L'accélération absolue du point A qui se déplace le long du plan incliné est,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = \ddot{X}\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

La loi du mouvement absolu du wagon s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P}_M + \boldsymbol{N}_M + \boldsymbol{F}_f = M\,\boldsymbol{a}_a(A) \tag{3}$$

En substituant les expressions des forces extérieures (1) et de l'accélération (2) dans la loi vectorielle du mouvement absolu (3) du wagon, et en la projetant le long des lignes de coordonnées cartésiennes absolues dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad Mg\,\sin\alpha - \mu_c\,N_M = M\ddot{X} \tag{4}$$

$$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad -\,Mg\,\cos\alpha + N_M = 0 \tag{5}$$

La substitution de l'équation de contrainte (5) dans l'équation du mouvement(5) donne la coordonnée d'accélération du wagon,

$$\ddot{X} = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) \tag{6}$$

En substituant la coordonnée (6) dans le vecteur accélération absolue du wagon (2), celui-ci devient,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{7}$$

2. (**0.5 point**) Déterminer le coefficient de frottement cinétique $\mu_{c,0}$ pour lequel le mouvement du wagon est un mouvement rectiligne uniforme en se souvenant qu'on néglige la masse et le mouvement du point matériel P.

Pour que le mouvement du wagon soit un mouvement rectiligne uniforme, il faut que l'accélération absolue du wagon soit nulle, c'est-à-dire $\boldsymbol{a}_a(A) = \boldsymbol{0}$. L'accélération (7) est donc nulle lorsque $\mu_c = \mu_{c,0}$. Ainsi,

$$\mu_{c,0} = \tan\alpha \tag{8}$$

3. (**0.5 point**) Déterminer la force élastique résultante $\boldsymbol{F}_e$ exercée sur le point matériel P.

La force élastique résultante $\boldsymbol{F}_e$ est la somme des forces élastiques $\boldsymbol{F}_{e,g}$ et $\boldsymbol{F}_{e,d}$ exercées par les ressorts de gauche et de droite,

$$\boldsymbol{F}_e = \boldsymbol{F}_{e,g} + \boldsymbol{F}_{e,d} = -\,k(x - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} - k(x - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} = -\,2k(x - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{9}$$

4. (**1.5 point**) Montrer que l'équation du mouvement relatif du point matériel P le long de la ligne de coordonnée relative d'abscisse x dans le référentiel relatif du wagon $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(x - \ell_0\right) - \mu_c\, g\, \cos\alpha = 0$$

Les forces extérieures exercées sur le point matériel P sont son poids $\boldsymbol{P}_m$, la force de réaction normale du wagon $\boldsymbol{N}_m$ et la force élastique résultante (9),

$$\boldsymbol{P}_m = m\,\boldsymbol{g} = mg\left(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}\right) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{N}_m = N_m\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{10}$$

La force d'inertie est la force de translation,

$$\boldsymbol{F}_t = -\,m\,\boldsymbol{a}_a\left(A\right) = -\,mg\left(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha\right)\hat{\boldsymbol{x}} \tag{11}$$

L'accélération relative du point matériel P le long du plan incliné du référentiel relatif du wagon $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\boldsymbol{a}_r\left(P\right) = \ddot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{12}$$

La loi du mouvement relatif du point matériel s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P}_m + \boldsymbol{N}_m + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_t = m\,\boldsymbol{a}_r\left(P\right) \tag{13}$$

En substituant les expressions de la force élastique résultante (9), du poids et de la force de réaction normale du wagon (10), de la force d'inertie (11) et de l'accélération (12) dans la loi vectorielle du mouvement relatif (13) du point matériel P, et en la projetant le long des lignes de coordonnées cartésiennes relatives dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\begin{aligned} &\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{x}}: \quad mg\sin\alpha - mg\left(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha\right) - 2k\left(x - \ell_0\right) = m\ddot{x} && (14)\\ &\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad -\,mg\cos\alpha + N_M = 0 && (15) \end{aligned}$$

L'équation du mouvement le long de la ligne de coordonnée relative d'abscisse (14) se réduit à,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(x - \ell_0\right) - \mu_c\, g\, \cos\alpha = 0 \tag{16}$$

5. (**1.0 point**) Déterminer la coordonnée relative d'équilibre x_0 du point matériel P.

L'équation du mouvement relatif (16) peut être mise sous la forme,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(x - \ell_0 - \frac{m}{2k}\,\mu_c\, g\, \cos\alpha\right) = 0 \tag{17}$$

A l'équilibre en $x = x_0$, la composante d'abscisse de l'accélération relative est nulle,

$$\ddot{x}_0 = 0 \tag{18}$$

ce qui implique que la coordonnée d'abscisse relative à l'équilibre est,

$$x_0 = \ell_0 + \frac{m}{2k}\,\mu_c\, g\, \cos\alpha \tag{19}$$

6. (**1.0 point**) Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ du plan incliné, déterminer l'énergie potentielle totale $V\left(x\right)$ du point matériel P comme fonction de la coordonnée relative x en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par le point A, et comme référence d'énergie potentielle élastique le centre du wagon, c'est-à-dire le point à équidistance des points A et B. Montrer ensuite explicitement par le calcul la stabilité ou l'instabilité de la coordonnée d'équilibre x_0.

Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ du plan incliné, l'énergie potentielle de pesanteur $V_g(x)$ et l'énergie potentielle élastique $V_e(x)$ du point matériel P s'écrivent,

$$V_g(x) = -\,mg\,x\sin\alpha \tag{20}$$
$$V_e(x) = k\,(x - \ell_0)^2 \tag{21}$$

L'énergie potentielle totale $V(x)$ est la somme des énergies potentielles de pesanteur et élastique,

$$V(x) = V_g(x) + V_e(x) = -\,mg\,x\sin\alpha + k\,(x - \ell_0)^2 \tag{22}$$

La dérivée première de l'énergie potentielle (22) évaluée à l'équilibre est donnée par,

$$\frac{dV}{dx}(x_0) = -\,mg\,\sin\alpha + 2k\,(x_0 - \ell_0) = 0 \tag{23}$$

Ainsi, la coordonnée d'abscisse relative à l'équilibre est,

$$x_0 = \ell_0 + \frac{m}{2k}\,\mu_c\,g\,\cos\alpha \tag{24}$$

qui est une solution alternative à la question précédente. La dérivée seconde de l'énergie potentielle (22) est donnée par,

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)(x_0) = 2k > 0 \tag{25}$$

ce qui montre que la position d'équilibre x_0 est un minimum de la fonction énergie potentielle totale $V(x)$, et donc une solution d'équilibre stable.

7. (**1.0 point**) Déterminer la période d'oscillation T du point matériel P lorsqu'elle existe.

Compte tenu de la coordonnée relative d'équilibre (19), l'équation du mouvement relatif (17) peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\,(x - x_0) = 0 \tag{26}$$

A l'aide de la déviation par rapport à l'équilibre,

$$z = x - x_0 \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{z} = \ddot{x} \tag{27}$$

on constate que l'équation du mouvement (26) devient,

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}\,z = 0 \tag{28}$$

ce qui décrit un mouvement oscillatoire de pulsation,

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{29}$$

et donc de période,

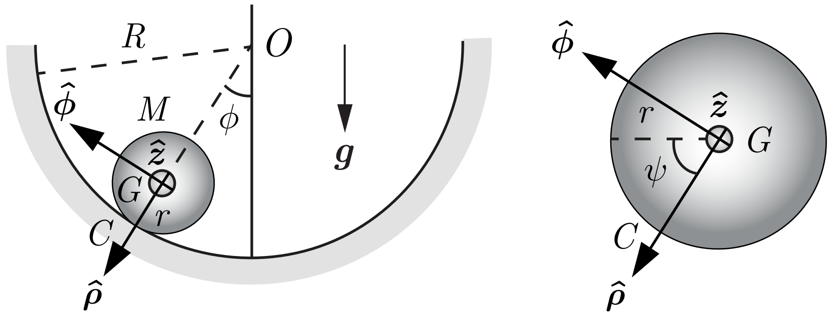
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \tag{30}$$

3. Cylindre dans un cylindre (7/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un cylindre homogène de masse M et de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'une cavité cylindrique fixe de rayon R centrée à l'origine O. L'axe de symétrie du cylindre qui passe par son centre de masse G est un axe horizontal et le moment d'inertie du cylindre par rapport à cet axe est $I_G = \lambda M r^2$ où $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Le vecteur vitesse angulaire de rotation propre du cylindre est $\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}}$, où l'angle de rotation propre ψ est défini positif dans le sens trigonométrique dans le plan vertical.

Pour décrire la dynamique du cylindre, on choisit un repère d'inertie cylindrique $(G, \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ attaché au centre de masse G où $\|\boldsymbol{OG}\| = R - r$. La cavité cylindrique est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par l'origine O. L'angle ϕ est défini positif vers la gauche à partir de cet axe vertical.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M, des rayons R et r, du facteur λ, de l'angle de précession ϕ, de l'angle de rotation propre ψ, des dérivées temporelles de ces angles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, et $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Calculer le moment cinétique $\boldsymbol{L}_C$ du petit cylindre évalué par rapport au point C.

Solution 1 : A l'aide du théorème de Huygens-Steiner, le moment d'inertie I_C s'écrit en fonction du moment d'inertie I_G comme,

$$I_C = I_G + Mr^2 = (\lambda + 1)\, Mr^2 \tag{1}$$

Etant donné que l'axe horizontal passant par le point C est parallèle à l'axe principal d'inertie passant par le centre de masse G, le moment cinétique $\boldsymbol{L}_C$ est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{L}_C = I_C\, \boldsymbol{\Omega} = -\,(\lambda + 1)\, Mr^2\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{2}$$

Solution 2 : Etant donné que l'axe horizontal passant par le centre de masse G est un axe principal d'inertie, le moment cinétique $\boldsymbol{L}_G$ est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\, \boldsymbol{\Omega} = -\,\lambda Mr^2\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{3}$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement, i.e. $\boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{0}$, la vitesse du centre de masse s'écrit,

$$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{CG} = \left(-\,\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{z}}\right) \times (-\,r\, \hat{\boldsymbol{\rho}}) = r\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4}$$

Compte tenu du théorème de transfert du moment cinétique,

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{CG} \times M\boldsymbol{V}_G = -\,\lambda Mr^2\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{z}} + (-\,r\, \hat{\boldsymbol{\rho}}) \times \left(Mr\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = -\,(\lambda + 1)\, Mr^2\dot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{5}$$

2. (**0.5 point**) Déterminer le moment de forces extérieures résultant $\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}}$ exercé sur le cylindre et évalué par rapport au point de contact C.

Le seul moment de force extérieure non-nul exercé sur le cylindre et évalué au point de contact C est celui de son poids $\boldsymbol{P}$ exercé au centre de masse G,

$$\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} = \boldsymbol{CG} \times \boldsymbol{P} = (-\,r\, \hat{\boldsymbol{\rho}}) \times\ Mg\left(\cancel{\cos\phi\, \hat{\boldsymbol{\rho}}} - \sin\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = Mg\, r \sin\phi\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{6}$$

3. (**1.0 point**) A l'aide des résultats des deux questions précédentes, montrer que l'équation du mouvement de rotation propre du petit cylindre s'écrit,

$$\ddot{\psi} = -\,\frac{1}{\lambda + 1}\, \frac{g}{r}\, \sin\phi$$

Le théorème du moment cinétique évalué au point de contact C s'écrit,

$$\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_C \tag{7}$$

Compte tenu de la relation (2), la dérivée temporelle du moment cinétique s'écrit,

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C = -\,(\lambda + 1)\, Mr^2\ddot{\psi}\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{8}$$

En identifiant les parties scalaires des membres de droites des relations (6) et (8), on obtient,

$$-\,(\lambda + 1)\, Mr^2\ddot{\psi} = Mg\, r \sin\phi \tag{9}$$

Ainsi, l'équation du mouvement de rotation propre du petit cylindre s'écrit,

$$\ddot{\psi} = -\,\frac{1}{\lambda + 1}\, \frac{g}{r}\, \sin\phi \tag{10}$$

4. (**1.0 point**) En utilisant explicitement la condition de roulement sans glissement du petit cylindre montrer que l'équation du mouvement du centre de masse G du petit cylindre s'écrit,

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\lambda+1}\,\frac{g}{R-r}\,\sin\phi = 0$$

La condition de roulement sans glissement du cylindre s'écrit,

$$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{CG} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{CG} = \left(-\,\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)\times\left(-\,r\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) = r\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{11}$$

Le centre de masse a un mouvement circulaire de rayon $R-r$ et de vitesse angulaire scalaire $\dot{\phi}$. Ainsi,

$$\boldsymbol{V}_G = (R-r)\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{12}$$

En identifiant les membres de droite des relations (11) et (12), on obtient,

$$r\dot{\psi} = (R-r)\,\dot{\phi} \tag{13}$$

La dérivée temporelle de la condition de liaison (13) s'écrit,

$$r\ddot{\psi} = (R-r)\,\ddot{\phi} \tag{14}$$

Compte tenu de l'accélération angulaire de rotation propre (10) et de la condition (14), l'équation du mouvement de précession du centre de masse G s'écrit,

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\lambda+1}\,\frac{g}{R-r}\,\sin\phi = 0 \tag{15}$$

5. (**2.0 points**) Déterminer la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ et la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s$ exercées sur le petit cylindre à l'aide de la loi du mouvement.

Les forces extérieures exercées sur le cylindre sont son poids $\boldsymbol{P}$, la réaction normale de la cavité $\boldsymbol{N}$ et la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s$, qui s'écrivent en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g} = Mg\left(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\\
&\boldsymbol{N} = -\,N\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\\
&\boldsymbol{F}_s = F_s\,\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned} \tag{16}$$

L'accélération du centre de masse s'écrit en coordonnées cylindriques,

$$\boldsymbol{A}_G = -\,(R-r)\,\dot{\phi}^2\hat{\boldsymbol{\rho}} + (R-r)\,\ddot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{17}$$

Le théorème du centre de masse du cylindre s'écrit,

$$\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_s = M\,\boldsymbol{A}_G \tag{18}$$

En substituant les forces extérieures (16) et l'accélération du centre de masse (17) dans le théorème du centre de masse (18) du cylindre, et en le projetant le long des lignes de coordonnées cylindriques dans le plan vertical, on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\rho}}:\quad Mg\cos\phi - N = -\,M\,(R-r)\,\dot{\phi}^2 \tag{19}$$

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}:\quad -\,Mg\sin\phi + F_s = M\,(R-r)\,\ddot{\phi} \tag{20}$$

Compte tenu des relations (16) et (19), la force de réaction normale s'écrit,

$$\boldsymbol{N} = -\,M\Big(g\cos\phi + (R-r)\,\dot{\phi}^2\Big)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{21}$$

Compte tenu des relations (15), (16) et (20), la force de frottement statique s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_s = M\Big(g\sin\phi + (R-r)\,\ddot{\phi}\Big)\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,Mg\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{22}$$

6. (**0.5 point**) Déterminer la pulsation des oscillations du centre de masse du petit cylindre dans la limite des petites oscillations autour de la position d'équilibre, i.e. $\phi \ll 1$ et $\sin\phi = \phi$.

   Dans la limite des petites oscillations autour de la position d'équilibre, i.e. $\sin\phi = \phi$, l'équation du mouvement du centre de masse (15) décrit un mouvement harmonique oscillatoire,

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\lambda+1}\,\frac{g}{R-r}\,\phi = 0 \tag{23}$$

   de pulsation,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\lambda+1}\,\frac{g}{R-r}} \tag{24}$$

7. (**1.0 point**) Déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du petit cylindre en prenant comme référence d'énergie potentielle la droite horizontale qui passe par l'origine O.

   L'énergie cinétique du cylindre est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation propre autour du centre de masse G ou uniquement l'énergie cinétique de rotation utour du point de contact C,

$$T = \frac{1}{2}\,M\,V_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\,\Omega^2 = \frac{1}{2}\,I_C\,\Omega^2 \tag{25}$$

   Compte tenu de la vitesse du centre de masse (12), l'énergie cinétique (25) devient,

$$T = \frac{1}{2}\,M\,(R-r)^2\,\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\,\lambda\,Mr^2\dot{\psi}^2 \tag{26}$$

   Compte tenu de la condition de roulement sans glissement (13),

$$T = \frac{1}{2}\,(\lambda+1)\,Mr^2\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}\,(\lambda+1)\,M\,(R-r)^2\,\dot{\phi}^2 \tag{27}$$

   L'énergie potentielle s'écrit,

$$V = -\,Mg\,(R-r)\cos\phi \tag{28}$$

   L'énergie mécanique s'écrit alors,

$$E = \frac{1}{2}\,(\lambda+1)\,M\,(R-r)^2\,\dot{\phi}^2 - Mg\,(R-r)\cos\phi \tag{29}$$

   Comme il n'y a pas de force dissipative, l'énergie mécanique E est conservée et sa dérivée temporelle est nulle,

$$\dot{E} = \Big((\lambda+1)\,M\,(R-r)^2\,\ddot{\phi} + Mg\,(R-r)\sin\phi\Big)\,\dot{\phi} = 0 \tag{30}$$

   ce qui donne l'équation du mouvement (15) à une constante près,

$$(\lambda+1)\,M\,(R-r)^2\,\ddot{\phi} + Mg\,(R-r)\sin\phi = 0 \tag{31}$$

   comme il se doit. C'est une solution alternative à la question 4.