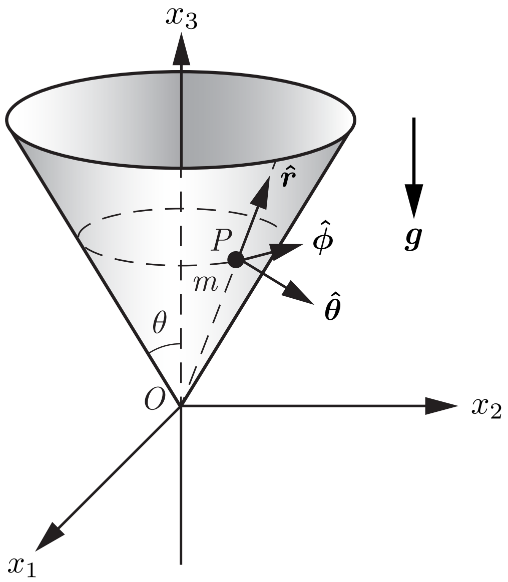
1. Cône avec frottement (6/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un point matériel P de masse m est astreint à se déplacer sur la surface intérieure d'un cône fixe. On considère que le point matériel est soumis à une force de frottement visqueux en régime laminaire,

$$\boldsymbol{F}_f = -\,\lambda\,\boldsymbol{v}$$

qui est une fonction linéaire de sa vitesse $\boldsymbol{v}$ et du coefficient de frottement $\lambda > 0$. Le temps d'amortissement dû au frottement est défini comme,

$$\tau = \frac{m}{\lambda}$$

Le sommet du cône se situe à l'origine O du repère cartésien fixe $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$. L'axe de symétrie du cône est la droite verticale passant par O et son angle d'ouverture est $\theta = \text{cste}$. Pour décrire la dynamique du point matériel P, on prend un repère sphérique mobile $(P, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ attaché au point matériel P, tel que les vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sont contenus dans un plan vertical et le vecteur de base $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ est horizontal.

Les réponses doivent être exprimées en termes des coordonnées sphériques r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, de la masse m, du coefficient de frottement λ, du temps d'amortissement τ, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, de la norme du champ gravitationnel g, du temps t et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Exprimer la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F_f}$ et le poids $\boldsymbol{P}$ en coordonnées sphériques.

   $\boldsymbol{F_f}$ = ...

   $\boldsymbol{P}$ = ...

2. (**1.0 point**) Déterminer la force de réaction normale du cône $\boldsymbol{N}$ en coordonnées sphériques à l'aide de la loi du mouvement.

   $\boldsymbol{N}$ = ...

3. (**0.5 point**) Montrer explicitement que le moment cinétique $\boldsymbol{L_O}$ du point matériel P évalué à l'origine O s'écrit,

   $$\boldsymbol{L_O} = L_O\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\,mr^2\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

4. (**0.5 point**) Montrer explicitement que l'équation du mouvement azimutal, c'est-à-dire selon le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, peut être mise sous la forme,

   $$2\,\frac{dr}{r} + \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\,\frac{dt}{\tau}$$

5. (**1.0 point**) A l'aide des résultats des deux questions précédentes, compte tenu des conditions initiales $r\,(0) = r_0$ et $\dot{\phi}\,(0) = \dot{\phi}_0$, déterminer l'évolution temporelle de la composante $L_O\,(t)$ du moment cinétique du point matériel évalué à l'origine O. *Indication : intégrer l'équation différentielle et utiliser l'identité logarithmique :* $\lambda\ln(a) + \ln(b) = \ln\left(a^{\lambda}b\right)$

   $L_O\,(t)$ = ...

6. (**0.5 point**) Dans le cas particulier où le mouvement est purement radial, c'est-à-dire $\dot{\phi} = 0$, montrer explicitement que l'équation du mouvement radial peut être mise sous la forme,

   $$\ddot{r} + \frac{1}{\tau}\,\dot{r} + g\cos\theta = 0$$

7. (**1.5 points**) A l'aide du résultats établi à la question précédente, compte tenu des conditions initiales $\dot{r}\,(0) = \dot{r}_0$ et $\dot{\phi}\,(0) = 0$, déterminer l'évolution temporelle de la vitesse radiale $\dot{r}\,(t)$, qui est solution de l'équation du mouvement radial.

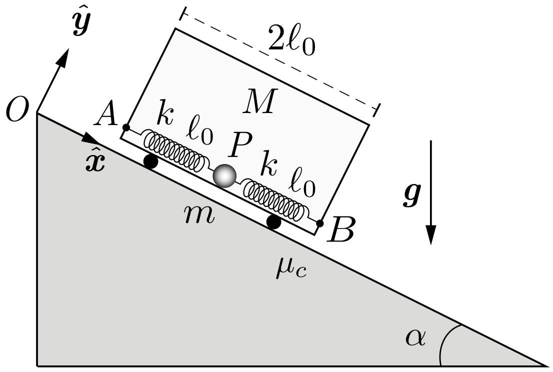
   $\dot{r}\,(t)$ = ...

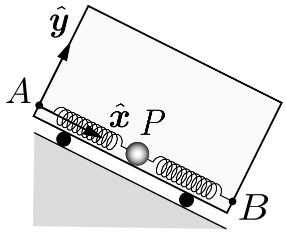
2. Oscillateur sur plan incliné (7/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :





Un wagon de masse M et de longueur $2\ell_0$ se déplace le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale avec un frottement sec caractérisé par un coefficient de frottement cinétique constant μ_c qui satisfait la condition,

$$\mu_c \geqslant \tan\alpha$$

Un point matériel P de masse m est attaché à deux ressorts identiques de masse négligeable, de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0, fixés aux points A et B sur les parois arrière et avant du wagon respectivement. Le point matériel P peut glisser sans frottement sur le sol du wagon le long du plan incliné. Il a un mouvement relatif rectiligne dans le référentiel relatif du wagon. Le wagon et le point matériel sont soumis au champ gravitationnel terrestre $\boldsymbol{g}$.

Pour décrire la dynamique du système formé du wagon et du point matériel P, on prend un repère cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ attaché à l'origine O choisie au haut du plan incliné. Ce repère est fixe par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du plan incliné. On prend un repère cartésien $(A, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ attaché au point A. Ce repère est mobile par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du plan incliné et fixe par rapport au référentiel accéléré relatif $\mathcal{R}'$ du wagon. Le vecteur position absolue $\boldsymbol{r}_a(A)$ et le vecteur position relative $\boldsymbol{r}_r(P)$ s'écrivent,

$$\boldsymbol{r}_a(A) = \boldsymbol{OA} = X\,\hat{\boldsymbol{x}} + Y\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{où} \qquad Y = \text{cste} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{r}_r(P) = \boldsymbol{AP} = x\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

La masse et le moment d'inertie des roues du wagon sont négligeables. Le mouvement du wagon (c'est-à-dire du point A) peut donc être considéré comme celui d'un point matériel. La masse M du wagon vide est très grande par rapport à la masse m du point matériel, c'est-à-dire $m \ll M$. Dans cette approximation, l'influence du mouvement du point matériel sur le mouvement du wagon est négligeable. Le mouvement du wagon peut donc être étudié en négligeant simplement la masse m du point matériel. La réciproque n'est pas vraie.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la coordonnée cartésienne relative x et de ses dérivées temporelles, du vecteur de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, de la masse m, du coefficient de frottement cinétique μ_c, de la constante élastique k, de la longueur à vide ℓ_0, de l'angle α, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 point**) En négligeant la masse et le mouvement du point matériel P, montrer que l'accélération absolue $\boldsymbol{a}_a(A)$ du point A du wagon s'écrit,

$$\boldsymbol{a}_a(A) = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

2. (**0.5 point**) Déterminer le coefficient de frottement cinétique $\mu_{c,0}$ pour lequel le mouvement du wagon est un mouvement rectiligne uniforme en se souvenant qu'on néglige la masse et le mouvement du point matériel P.

$\mu_{c,0} =$ ....

3. (**0.5 point**) Déterminer la force élastique résultante $\boldsymbol{F}_e$ exercée sur le point matériel P.

$\boldsymbol{F}_e =$ ....

4. (**1.5 point**) Montrer que l'équation du mouvement relatif du point matériel P le long de la ligne de coordonnée relative d'abscisse x dans le référentiel relatif du wagon $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}(x - \ell_0) - \mu_c\, g\, \cos\alpha = 0$$

5. (**1.0 point**) Déterminer la coordonnée relative d'équilibre x_0 du point matériel P.

$x_0 =$ ....

6. (**1.0 point**) Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ du plan incliné, déterminer l'énergie potentielle totale $V(x)$ du point matériel P comme fonction de la coordonnée relative x en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par le point A, et comme référence d'énergie potentielle élastique le centre du wagon, c'est-à-dire le point à équidistance des points A et B. Montrer ensuite explicitement par le calcul la stabilité ou l'instabilité de la coordonnée d'équilibre x_0.

$V =$ ....

7. (**1.0 point**) Déterminer la période d'oscillation T du point matériel P.

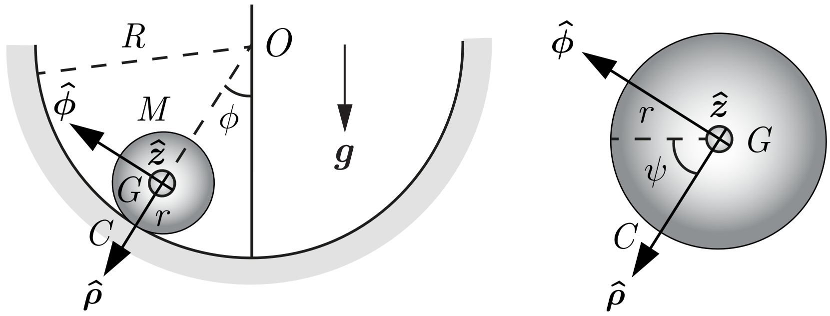
$T =$ ....

3. Cylindre dans un cylindre (7/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un cylindre homogène de masse M et de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'une cavité cylindrique fixe de rayon R centrée à l'origine O. L'axe de symétrie du cylindre qui passe par son centre de masse G est un axe horizontal et le moment d'inertie du cylindre par rapport à cet axe est $I_G = \lambda M r^2$ où $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Le vecteur vitesse angulaire de rotation propre du cylindre est $\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{z}}$, où l'angle de rotation propre ψ est défini positif dans le sens trigonométrique dans le plan vertical.

Pour décrire la dynamique du cylindre, on choisit un repère d'inertie cylindrique $(G, \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ attaché au centre de masse G où $\|\boldsymbol{OG}\| = R - r$. La cavité cylindrique est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par l'origine O. L'angle ϕ est défini positif vers la gauche à partir de cet axe vertical.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M, des rayons R et r, du facteur λ, de l'angle de précession ϕ, de l'angle de rotation propre ψ, des dérivées temporelles de ces angles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, et $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Calculer le moment cinétique $\boldsymbol{L}_C$ du petit cylindre évalué par rapport au point C.

   $\boldsymbol{L}_C =$ ....

2. (**0.5 point**) Déterminer le moment de forces extérieures résultant $\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}}$ exercé sur le cylindre et évalué par rapport au point de contact C.

   $\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} =$ ....

3. (**1.0 point**) A l'aide des résultats des deux questions précédentes, montrer que l'équation du mouvement de rotation propre du petit cylindre s'écrit,

   $$\ddot{\psi} = -\,\frac{1}{\lambda+1}\,\frac{g}{r}\,\sin\phi$$

4. (**1.0 point**) En utilisant explicitement la condition de roulement sans glissement du petit cylindre montrer que l'équation du mouvement du centre de masse G du petit cylindre s'écrit,

   $$\ddot{\phi} + \frac{1}{\lambda+1}\,\frac{g}{R-\,r}\,\sin\phi = 0$$

5. (**2.0 points**) Déterminer la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ et la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s$ exercées sur le petit cylindre à l'aide de la loi du mouvement.

   $\boldsymbol{N} =$ ....

   $\boldsymbol{F}_s =$ ....

6. (**0.5 points**) Déterminer la pulsation des oscillations du centre de masse du petit cylindre dans la limite des petites oscillations autour de la position d'équilibre, i.e. $\phi \ll 1$ et $\sin\phi = \phi$.

   $\omega =$ ....

7. (**1.0 points**) Déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du petit cylindre en prenant comme référence d'énergie potentielle la droite horizontale qui passe par l'origine O.

   $T =$ ....

   $V =$ ....