Ens. P. Wittwer
Analyse II - (n/a)
3 août 2020
Durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 34 questions sur 12 pages, les dernières pages pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Partie commune, 18 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$
- ☐ toutes les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais une des dérivées partielles de f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais f n'est pas de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$

Question 2 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' - 2y = -x^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ vérifie aussi :

- ☐ $y(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}$
- ☐ $y(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}$
- ☐ $y(1) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{5}{4}$
- ☐ $y(1) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{3}{4}$

Question 3 : Soit, pour tout $\beta > 1$, la fonction $f_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\beta(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors, la dérivée directionnelle de f_β en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$:

- ☐ est un nombre réel positif si $\beta > 1$
- ☐ vaut $\frac{1}{2}$ si $\beta = 2$
- ☐ vaut $\dfrac{1}{2^{\frac{\beta+1}{2}}}$ si $\beta < 2$
- ☐ vaut 0 si $\beta > 2$

Question 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos\left(2x + 3y + y^2\right)$$

Alors, le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est donné par :

- ☐ $p_2(x,y) = 1 - 2x^2 - 6xy - \frac{9}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 2x + 3y + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 - (2x+3y)^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}y^2$

Question 5 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx\right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^{1/3}}^{y^2} f(x,y)\,dx\right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx\right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx\right) dy$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \int_t^{t^2} \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt}}{x}\,dx$$

Alors, la dérivée de f est donnée par :

- ☐ $f'(t) = \dfrac{2 - 2\mathrm{e}^{-t^3} - 3\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$
- ☐ $f'(t) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-t^3}(t+1) + 2\mathrm{e}^{-t^2} - t + 1}{t^2}$
- ☐ $f'(t) = \dfrac{1 - 3\mathrm{e}^{-t^3} - \mathrm{e}^{-t^2}}{t}$
- ☐ $f'(t) = \dfrac{-3\mathrm{e}^{-t^3} + 2\mathrm{e}^{-t^2} + 1}{t}$

Question 7 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)^{\mathrm{T}}$. Alors, la matrice jacobienne de la fonction composée $g = f \circ f$ en (x,y,z) est :

- ☐ $J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4yz \\ 4xz & 0 & 0 \\ 0 & 4xy & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 4y^2z & 0 \\ 0 & 0 & 4xz^2 \\ 4x^2y & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 4x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4y^3 \\ 4z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4z^3 \\ 4x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4y^3 & 0 \end{pmatrix}$

Question 8 : Soit

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz$$

vaut :

- ☐ $\frac{\pi}{3}$
- ☐ $\frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- ☐ $2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- ☐ $\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Question 9 : Soit l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$ telle que : $\forall \alpha \in X$, toutes les solutions $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'' + (\alpha+1)y' + \frac{1}{4}y = 0$$

satisfont $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. Alors :

- ☐ $X =]-1, +\infty[$
- ☐ $X = \mathbb{R}$
- ☐ $X =]-2, 0[$
- ☐ $X = [-1, +\infty[$

Question 10 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = \mathrm{e}^{x-y}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ vérifie aussi :

- ☐ $y(2) = \mathrm{Log}\left(2 - \mathrm{e}^2\right)$
- ☐ $y(2) = 2$
- ☐ $y(2) = \mathrm{Log}(2)$
- ☐ $y(2) = \frac{1}{2}$

Question 11 : Soient les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = y^2 + xy + \sqrt{3}\,x$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - \frac{3}{4}$$

Alors, sous la contrainte $g(x,y) = 0$,

- ☐ le maximum absolu de la fonction f est plus petit que 1
- ☐ la fonction f atteint son maximum absolu en exactement un point
- ☐ le minimum absolu de la fonction f est plus petit que $-\sqrt{3}$
- ☐ la fonction f atteint son minimum absolu en exactement deux points

Question 12 : L'ensemble $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 \leq 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$ est :

- ☐ non borné et ni ouvert ni fermé
- ☐ non borné mais fermé
- ☐ borné mais ni ouvert ni fermé
- ☐ borné et fermé

Question 13 : Soit la surface $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x + y^2 + z^3 - 1 = 0\right\}$. L'équation du plan tangent à S au point $(1,-1,-1)$ est :

- ☐ $-3z - x - 2y + 2 = 0$
- ☐ $x - 1 - 2(y+1) + 3(z+1) = 0$
- ☐ $-(x-1) + (y+1) + (z+1) = 0$
- ☐ $-(y-2) + (x+1) + (z-3) = 0$

Question 14 : Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + y^2$$

Alors :

- ☐ f admet un minimum local en $\left(-\frac{5}{3},\, 0\right)$
- ☐ f n'admet pas de maximum absolu
- ☐ le maximum absolu de f vaut 18
- ☐ le minimum absolu de f vaut 2

Question 15 : Soit la fonction $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celle qui a un point de discontinuité dans son domaine de définition :

- ☐ $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\operatorname{sign}(t)\cos(t),\ \operatorname{sign}(t)\sin(t))^{\mathrm{T}}$
- ☐ $f :]0, 5[\to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(t^2,\ t^2\cos(\frac{1}{t})\right)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t-2}},\ \operatorname{sign}(t)t,\ \sin(t)\right)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $f :]-1, 2[\to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (t,\ |t|,\ \operatorname{sign}(t)(\mathrm{e}^t - 1))^{\mathrm{T}}$

Question 16 : Soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine de définition du changement de coordonnées $\Phi\colon \widetilde{D} \to D$, défini par

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \\ \dfrac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Sachant que $D =]1, 2[\times]1, 2[$, lequel parmi les ensembles suivants est le seul à pouvoir correspondre à $\widetilde{D}$?

- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 > 0, \quad x_1x_2 < 2, \quad 1 < \dfrac{x_2}{x_1} < 2\right\}$
- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 > 0, \quad x_2 > \dfrac{1}{x_1}, \quad x_2 < 2x_1\right\}$
- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 > 0, \quad \dfrac{1}{x_1} < x_2 < \dfrac{2}{x_1}, \quad x_2 < x_1 < 2x_2\right\}$
- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 \geq 0, \quad x_1x_2 < 2, \quad x_1 < x_2 < 2x_1\right\}$

Question 17 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2y + y^4}{x^4 + y^2}$$

Alors :

- ☐ f n'admet pas de limite en $(0, 0)$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = y^2$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

Question 18 : Soit
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$
Alors, l'intégrale
$$\int_D \mathrm{Log}(x^2 + y^2)\ dxdy$$
vaut :

- ☐ $\pi\,\mathrm{Log}(4) - \frac{3\pi}{4}$
- ☐ $\pi\,\mathrm{Log}(16) - \pi$
- ☐ $\pi\,\mathrm{Log}(4) - \pi$
- ☐ $\pi\,\mathrm{Log}(2) - \frac{\pi}{4}$

Partie commune, 10 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est non bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$. Alors les fonctions derivées partielles existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit la fonction $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = y - f(x)$. Alors, le gradient de F en $(0, f(0))$ est orthogonal à la tangente au graphe de la fonction f en $(0, f(0))$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(D, \mathbb{R})$. Alors f atteint son minimum absolu dans D.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ telle que $(0, 0, 0)$ soit un point stationnaire de f et telle que le déterminant de la matrice hessienne de f en $(0, 0, 0)$ soit strictement positif. Alors, f admet un minimum local en $(0, 0, 0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Alors, $\int_D (x + y)\, dxdy = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image de f est l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum absolu de f sur D et M est le maximum absolu de f sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$ et soit y_0 une solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Alors, pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y = y_0 + Cy_1$ est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telle que $F(1,0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,0) \neq 0$. Alors, ils existent un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(I, \mathbb{R})$, tels que $f(0) = 1$ et $\forall y \in I$, $F(f(y), y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$. Alors, f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Partie spécifique, 5 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 29 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine dans le premier quadrant délimité par les courbes $y = x^3$, $y = x^3 + 1$, $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{2}{x}$. Alors, l'intégrale

$$\int_D \left(3x^3 + y\right)\ dx\, dy$$

vaut :

- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ 1

Question 30 : Soit la fonction $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \left(\mathrm{e}^{2t} - t,\ 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{t}\right)^{\mathrm{T}}$$

Alors, la longueur de γ est :

- ☐ $\mathrm{e}^2 - 1$
- ☐ $2\mathrm{e}^2 - 1$
- ☐ $2\mathrm{e}^2$
- ☐ e^2

Question 31 : Soient les fonctiones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz + 1 \\ y - x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u^3 + v^2 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$$

Alors, en $(x,y,z) = (1,1,0)$, la matrice jacobienne de la fonction composée $h = g \circ f$ est :

- ☐ $J_h(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_h(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_h(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_h(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Question 32 : Soit la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y,z) = \mathrm{e}^{z+y} + z^2 y - y - 1 + \int_0^x \frac{e^t + 1}{t^2+1}\, dt,$$

et soient un voisinage U de $(x,y) = (0,0)$ et la fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ tels que $f(0,0) = 0$ et $\forall x, y \in U$, $F(x,y,f(x,y)) = 0$. Alors :

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\dfrac{1}{2}$

Question 33 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Si les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ suivant les vecteurs $v_1 = (1,6)^{\mathrm{T}}$ et $v_2 = (-3,2)^{\mathrm{T}}$ valent $\dfrac{\partial f}{\partial v_1}(0,0) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v_2}(0,0) = 11$, alors le gradient de f au point $(0,0)$ vaut :

- ☐ $\nabla f(0,0) = (-3,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\nabla f(0,0) = (-1,2)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\nabla f(0,0) = (2,-1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\nabla f(0,0) = (3,-1)^{\mathrm{T}}$

Partie spécifique, 1 question du type Vrai ou Faux

Marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 34 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$, telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to 0} f\left(t, \alpha t^2\right) = 0$. Alors, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to 0} f\left(t, \alpha t^3\right) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX