MER S. Deparis
Algèbre linéaire - (n/a)
21 janvier 2019
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^2$. Alors la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, est

☐ $P = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -30 & -19 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \begin{pmatrix} -19 & -7 \\ 30 & 11 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$.

Question 2 : Soient

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad W = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique, alors la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W est

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Question 3 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et B une matrice de taille 4×4 telle que $AB = I_4$.
Soit $\text{Tr}(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}$ la trace de B. Alors

☐ $\text{Tr}(B) = 3$.

☐ $\text{Tr}(B) = 2$.

☐ $\text{Tr}(B) = 1$.

☐ $\text{Tr}(B) = 5$.

Question 4 : Soient

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

et soit $W = \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, sans normalisation et sans changer l'ordre, appliqué à la base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ de W nous fournit une base orthogonale $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de W, où

- ☐ $\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- ☐ $\vec{v}_3 = \vec{x}_3 + 9\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2$.
- ☐ $\vec{v}_3 = \vec{x}_3 + \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
- ☐ $\vec{v}_3 = \vec{x}_3$.

Question 5 : Soit α un nombre réel et

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice A est égal à

- ☐ $\det(A) = -2$.
- ☐ $\det(A) = 2 - \alpha$.
- ☐ $\det(A) = -2 - \alpha$.
- ☐ $\det(A) = 2$.

Question 6 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ telle que $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Alors il est toujours vrai que

- ☐ $\dim\big(\text{Col}(A^T)\big) = n$.
- ☐ $A^T\vec{y} = \vec{0}$ possède une solution unique.
- ☐ $\dim\big(\text{Ker}(A)\big) = 0$.
- ☐ $A^T\vec{y} = \vec{c}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Question 7 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et $V = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = 3\vec{x} \right\}$. Alors:

- ☐ $V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $V = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$.

Question 8 : Soit A une matrice de taille $m \times n$. Si $m < n$, alors la plus petite valeur possible pour $\dim(\mathrm{Ker}\, A)$ est

- ☐ $m - n$.
- ☐ 0.
- ☐ $n - m$.
- ☐ m.

Question 9 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ -12x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \\ -24x_1 + 18x_3 \\ -12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Question 10 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

- ☐ -5, -1 et 2.
- ☐ -5, -2 et 3.
- ☐ -2, 1 et 5.
- ☐ -3, 2 et 5.

Question 11 : Soit $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_6\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^6$ muni du produit scalaire canonique et

$$A = 3\vec{v}_1\vec{v}_1^T - 2\left(\vec{v}_2\vec{v}_2^T + \vec{v}_3\vec{v}_3^T\right) + \tfrac{1}{3}\left(\vec{v}_4\vec{v}_4^T + \vec{v}_5\vec{v}_5^T + \vec{v}_6\vec{v}_6^T\right).$$

Le polynôme caractéristique p_A de A est donné par

- ☐ $p_A(t) = (t-3) + 2(t+2) + 3(t-\frac{1}{3})$.
- ☐ $p_A(t) = (t-3)(t+2)^2(t-\frac{1}{3})^3$.
- ☐ $p_A(t) = (t-3) + (t+2)^2 + (t-\frac{1}{3})^3$.
- ☐ $p_A(t) = t^3(t-3)(t+2)(t-\frac{1}{3})$.

Question 12 : Soit $\mathcal{B} = \left\{1, 1+t, 1+t^2\right\}$ une base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(a+bt+ct^2) = (a+b+c) + (a-b)t + (b-c)t^2 \qquad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

La matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, telle que $\left[T(p)\right]_{\mathcal{B}} = M\left[p\right]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, est

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 13 : Soit h un paramètre réel et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -h \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors les matrices A_1, A_2, A_3 et A_4 sont linéairement dépendantes si et seulement si

- ☐ $h \in \{-1, 0, 1\}$.
- ☐ $h \in \{0, 1\}$.
- ☐ $h = 0$.
- ☐ $h \in \{-1, 0\}$.

Question 14 : Soient h un paramètre réel,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{7}{3} & 1 \\ -3 & 1-2h & 1-h \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3}h + \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$

- ☐ admet le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(4+h+h^2+1) \\ \frac{1}{2}(h-h^2-1) \\ h^2+1 \end{pmatrix}$ pour solution pour tout choix de h.
- ☐ n'admet aucune solution pour tout choix de h.
- ☐ admet le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(4+h) \\ \frac{1}{2}h \\ 0 \end{pmatrix}$ pour solution si et seulement si $h \neq \pm 1$.
- ☐ admet le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(4+h) \\ \frac{1}{2}h \\ 0 \end{pmatrix}$ pour solution si et seulement si $h = \pm 1$.

Question 15 : Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{une base de } \mathbb{R}^2, \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

la matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\left[T(\vec{x})\right]_{\mathcal{B}} = M\left[\vec{x}\right]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Alors

- ☐ $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ 9x_1 + 9x_2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -7x_1 + 19x_2 \\ -6x_1 + 15x_2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $T(\vec{x}) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4x_1 - 7x_2 \\ -9x_1 + 18x_2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$.

Question 16 : Soit $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3.
Parmi les trois sous-ensembles de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 & v \\ 0 & w & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R} \text{ et } uv = w^2 \right\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 7 \\ -5 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 1 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

- ☐ seulement $\mathcal{E}_2$.
- ☐ seulement $\mathcal{E}_3$.
- ☐ seulement $\mathcal{E}_1$.
- ☐ seulement $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$.

Question 17 : Soit $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(a+bt+ct^2+dt^3\right) = \begin{pmatrix} a+b-c+3d \\ b+2d \\ 2a+3b-2c+8d \\ -3b-6d \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{4+2t+3t^2-t^3\,,\ t+2t^3\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{1+t^2\,,\ 1+2t-t^3\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{2t-t^2-t^3\,,\ 2+t^2\right\}$.
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{t+t^3\,,\ 1+2t^2-t^3\right\}$.

Question 18 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en base orthonormée et peut s'écrire sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale et D une matrice diagonale, où

- ☐ $Q = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$.
- ☐ $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $Q = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$.

Question 19 : Soient A une matrice non-nulle de taille $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Alors, il est toujours vrai que

- ☐ le vecteur $\vec{b} - A\vec{x}$ appartient à $\operatorname{Ker}(A^T)$ pour un unique choix de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ☐ la matrice $A^T A$ est inversible.
- ☐ l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution au sens des moindres carrés.
- ☐ $A\widehat{x} = A\widehat{x}'$ si $\widehat{x}$ et $\widehat{x}'$ sont deux solutions au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Question 20 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & -17 & 16 \\ -2 & 16 & -3 & -11 \\ 3 & -15 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de la matrice A (en utilisant seulement des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous). Alors l'élément ℓ_{42} de la matrice L est donné par

- ☐ $\ell_{42} = -\frac{2}{3}$.
- ☐ $\ell_{42} = \frac{3}{2}$.
- ☐ $\ell_{42} = \frac{2}{3}$.
- ☐ $\ell_{42} = -\frac{3}{2}$.

Question 21 : Soient A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\frac{\det(A^T) + \det(B^T)}{\det(A)\det(B)}$$

- ☐ est égal à $\det(A^T - A) + \det(B^T - B)$.
- ☐ est égal à $\det(A^{-1}) + \det(B^{-1})$.
- ☐ est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$.
- ☐ est égal à $\dfrac{1}{\det(B)} - \dfrac{1}{\det(A)}$.

Question 22 : Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille 3×3.
On suppose que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que

(a) les espaces propres de A sont $E_1 = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ et $E_2 = \text{Vect}\{\vec{u}_3\}$,

(b) $B\vec{u}_2 = -\vec{u}_2$ et $\text{Ker}(B) = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$.

Alors

- ☐ aucune des matrices AB et $A+B$ n'est diagonalisable en général.
- ☐ la matrice $A+B$ est toujours diagonalisable, mais AB n'est pas diagonalisable en général.
- ☐ la matrice AB est toujours diagonalisable, mais $A+B$ n'est pas diagonalisable en général.
- ☐ les matrices AB et $A+B$ sont toujours diagonalisables.

Question 23 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ☐ $\widehat{x}_1 = 4/5$ et $\widehat{x}_2 = 1$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 8/5$ et $\widehat{x}_3 = 0$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 4/5$ et $\widehat{x}_2 = 0$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 8/5$ et $\widehat{x}_3 = 1$.

Question 24 : Soit b un paramètre réel et soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b-1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & b+1 & b \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ pour $b = -1$ la matrice A possède deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.
- ☐ pour tout $b \neq \pm 1$ la matrice A possède deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.
- ☐ pour $b = 1$ la matrice A possède une seule valeur propre et est diagonalisable.
- ☐ pour tout $b \neq \pm 1$ la matrice A possède une seule valeur propre et est diagonalisable.

Deuxième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 25 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

Soient A et B les deux matrices 4×4 données ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Seule une des deux matrices est diagonalisable en base orthonormée. Laquelle et pourquoi? *(1 point)*

(b) Donner une diagonalisation en base orthonormée sous la forme PDP^{-1} de la matrice du point (a). *(7 points)*

Question 26 : *Cette question est notée sur 10 points.*

Réservé au correcteur

Réservé au correcteur

Soient V et W deux espace vectoriels réels ayants deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement.

(a) Donner la définition de coordonnées d'un vecteur. *(2 points)*

(b) Donner la définition de transformation linéaire $T : V \to W$ *(2 points)*

(c) Prouver qu'il existe une unique matrice A, appelée matrice de T associée aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, telle que pour tout $\vec{v} \in V$, $\big[T(\vec{v})\big]_{\mathcal{C}} = A\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}$. *(6 points)*
Donner la forme de la matrice A.