

# Cours Euler: Série 26

le 24 mars 2021

## Exercice 1

Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies pour toutes affirmations  $R$  et  $S$ ? Lorsqu'une affirmation est vraie, donnez-en une démonstration (déduction ou table). Sinon donne un contre-exemple (c'est-à-dire un exemple qui montre que l'affirmation est fausse).

**Indication** : Essaie d'abord avec un exemple pour voir si l'affirmation a une chance d'être vraie. Choisis des affirmations  $R$  et  $S$  qui ne sont pas équivalentes pour ce test !

1.  $(R \Rightarrow S) \Rightarrow (\neg R \Rightarrow \neg S)$ .
2. Si  $R$  est vraie et  $R \Rightarrow S$  est vraie, alors  $S$  est vraie.
3. Si  $R$  est fausse et  $R \Rightarrow S$  est vraie, alors  $S$  est fausse.
4. Si  $R$  est vraie et si  $R \Rightarrow S$  est fausse, alors  $S$  est vraie.
5. Si  $R \Rightarrow S$  est vraie, alors  $S$  est vraie.
6.  $R \Rightarrow (R \cup S)$
7.  $(R \cup S) \Rightarrow R$ .
8.  $(R \cap S) \Rightarrow R$ .
9.  $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (S \Rightarrow R)$
10.  $((R \Rightarrow S) \cap (S \Rightarrow T)) \Rightarrow (R \Rightarrow T)$

## Exercice 2

**Tables de vérité.** (a) Démontre que la négation de  $A$  et  $B$  est l'affirmation non  $A$  ou non  $B$  en remplissant la table de vérité suivante. La première colonne montre si  $A$  est vraie ou fausse et la deuxième le fait pour  $B$ , en alternant les valeurs V et F de sorte que les quatre possibilités apparaissent : VV, VF, FV et FF. Il s'agit de remplir l'avant-dernière colonne à l'aide de la précédente et la dernière à l'aide des colonnes 3 et 4.

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \cap B$	$\neg(A \cap B)$	$\neg A \cup \neg B$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

(b) Démontre que l'affirmation  $D = \ll A \text{ et } (B \text{ ou } C) \gg$  est équivalente à l'affirmation  $E = \ll (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C) \gg$  en remplissant la table de vérité suivante :

$A$	$B$	$C$	$B \cup C$	$D$	$A \cap B$	$A \cap C$	$E$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

**Exercice 3**

Ecris la négation des affirmations suivantes (avec le langage mathématique : pour tout, il existe, etc.).

- (a) Il y a des légumes que je n'aime pas.
- (b) Tous les chats sont noirs.
- (c) Il existe des perroquets qui ne parlent pas.
- (d) Aucun perroquet ne parle.
- (e) Les perroquets parlent parfois.
- (f) Pour chaque magasin, il existe un jour de la semaine où il est fermé.
- (g) Il existe un jour de la semaine tel que tous les magasins sont fermés.

**Exercice 4**

**Pour tout - Il existe.** Soit  $A$  une phrase faisant intervenir des nombres naturels  $m$  et  $n$  indéterminés. Supposons que  $A$  est une affirmation si on fixe les nombres  $m$  et  $n$  (par exemple la phrase «  $m = 3 \cdot n$  » est une affirmation (fausse) si  $m = 2$  et  $n = 4$ ). On considère les affirmations  $B =$  « Pour tout  $m$ , il existe  $n$  tel que  $A$  est vraie » et  $C =$  « Il existe  $n$  tel que  $A$  est vraie pour tout  $m$  ».

1. Montre que l'implication  $B \Rightarrow C$  est fausse en général. (Indication : prendre pour  $A$  la phrase «  $n = m + 1$  »)
2. Essaie d'expliquer pourquoi l'implication inverse  $C \Rightarrow B$  est par contre vraie.

**Exercice 5**

**Récurrence I.** On cherche à calculer la somme des puissances de 2, c'est-à-dire

$$p(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$$

1. Calcule  $p(0) = 2^0$ , puis  $p(1)$ ,  $p(2)$  et  $p(3)$ .
2. Sans lire la partie suivante émetts une hypothèse sur la valeur de  $p(n)$  en général.
3. Démontre par récurrence que  $p(n) = 2^{n+1} - 1$ . Il s'agit donc de vérifier que cette formule est correcte pour  $n = 0$  (vérifie aussi qu'elle est vraie pour  $n \leq 3$ , les valeurs calculées ci-dessus) puis il faut démontrer que si  $p(n) = 2^{n+1} - 1$ , alors  $p(n+1) = 2^{n+2} - 1$ .

**Exercice 6**

**Récurrence II.** On construit une pyramide avec des blocs de pierre cubiques d'un mètre de côté en commençant avec une base carrée de  $n$  mètres de côté. On construit ensuite le deuxième étage de sorte à obtenir des marches d'un demi-mètre de profondeur : le deuxième étage mesure donc  $(n-1)$  mètres sur  $(n-1)$ . On continue ainsi de suite jusqu'au sommet constitué d'un unique bloc de pierre. On appelle  $f(n)$  le nombre de cubes qu'il faut pour construire la pyramide.

1. Calcule  $f(1)$ ,  $f(2)$  et  $f(3)$ .
2. Montre que les valeurs calculées ci-dessus coïncident avec  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  pour  $1 \leq n \leq 3$ .
3. Démontre par récurrence que  $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Exercice 7**

**Récurrence III.** Démontre par récurrence que le nombre  $3^{2n} - 2^{n-3}$  est un multiple de 7 pour tout entier naturel  $n \geq 3$ . Tu initialises ici la récurrence en vérifiant que l'affirmation est vraie pour  $n = 3$ . Il faut ensuite montrer que si l'affirmation est vraie pour  $n$ , alors elle l'est aussi pour  $n + 1$ . Ceci revient à montrer que

$$3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)-3}$$

est un multiple de 7. Une astuce utile ici sera de mettre en évidence  $3^2$  dans la puissance de 3 et de l'écrire  $3^2 = 9 = 7 + 2$ , pour pouvoir isoler un multiple de 7.

A partir d'ici les exercices sont des problèmes de test d'il y a quelques années. Gardez-les pour vérifier si vous êtes prêts!

**Exercice 8**

**Vrai ou faux ?** Justifie tes réponses!

1. La relation réciproque de  $\leq : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$  est la relation  $> : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ .
2. Soit  $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} | n \leq m\}$  la représentation ensembliste d'une relation  $R : \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Alors l'ensemble de définition de  $R$  est vide.
3. Pour n'importe quels ensembles  $X$  et  $Y$ , il existe une fonction de  $X$  vers  $Y$ .
4. Il y a 6 fonctions injectives de  $\{\diamond, \heartsuit\}$  vers  $\{0, 1, 2\}$ .
5. Le degré de l'équation  $x^4 - 3x + 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$  est 1.

**Exercice 9**

**Deux fonctions.** On considère la fonction réelle  $f(x) = 2x - 1$  et la fonction  $g(x) = \sqrt{x}$ .

- (1) Quel est l'ensemble de définition de  $f$  et quel est l'ensemble de définition de  $g$ ?
- (2) La fonction  $f$  est-elle injective? surjective? Justifie tes réponses!
- (3) Dessine le graphe de la fonction  $f$ .
- (4) Calcule la composition  $g \circ f$ . Quel est l'ensemble de définition de cette fonction?
- (5) Calcule la composition  $f \circ g$ . Quel est l'ensemble de définition de cette fonction?
- (6) **Bonus.** Dessine le graphe de  $g$ .

**Exercice 10****Équations.**

Soit  $m \in \mathbb{R}$  un paramètre. On considère l'équation affine  $mx - x + m + 1 = 0$ . Détermine en fonction des valeurs de  $m$  les solutions de cette équation.

**Exercice 11****Un problème.**

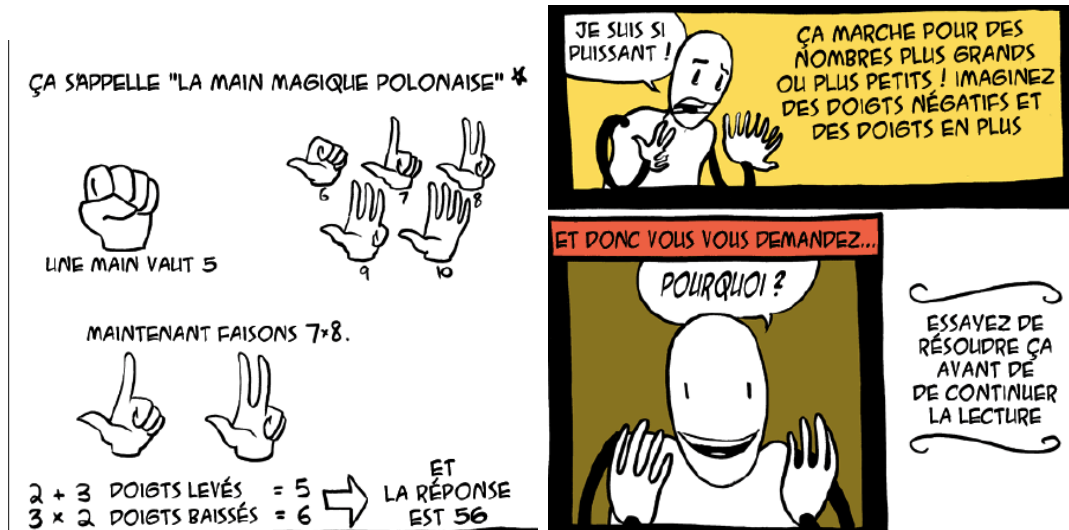
Le magicien Moebius pense à un nombre. Il lui ajoute 20 et multiplie le résultat par 2. Curieusement il trouve 10 fois le nombre de départ. Quel est ce nombre?

**Et pour terminer.** Deux exercices différents pour y réfléchir dès maintenant ou pendant les vacances de Pâques! Ces exercices ne seront pas corrigés.

### Exercice 12

#### La main magique polonaise.

Tiré du webcomic "les céréales du dimanche matin", <http://cereales.lapin.org/index.php?number=1766>



### Exercice 13

On cherche le plus petit nombre entier naturel  $n$  qui a la propriété suivante :

« Dans tout groupe de  $n$  personnes il existe toujours soit un sous-groupe de 3 personnes qui se connaissent toutes entre elles, soit un sous-groupe de 3 personnes qui ne se connaissent pas. »