Cours Euler: Série 23

le 3 mars 2021

Exercice 1

Proportionalité.
1. On compare la longueur de plusieurs véhicules et celle de leur miniature réduites à la même échelle.

(a) Un camion mesure 1000 cm et son module réduit 2 cm. Etablis un tableau de correspondance des mesures en centimètres des cinq véhicules de l'exposition sachant que trois véhicules mesurent $800, 1200$ et 1500 cm, et qu'une miniature mesure 2,6 cm.

(b) Sur du papier quadrillé, dessine un système d'axes. Les abscisses représentent la longueur des miniatures en vraie grandeur (un centimètre sur la feuille représente un centimètre). Les ordonnées représentent la longueur des véhicules : 1/2 centimètre sur la feuille représente 200 cm. Reporte les cinq points dont tu as trouvés les coordonnées en (a).

(c) Trouve une formule qui exprime la longueur y des véhicules en fonction des longueurs x des miniatures. Prolonge alors le graphe esquissé (b).

2. La société de taxis "Besson" affiche ses prix. Pour la prise en charge, 2,30 et ensuite 1,10 par kilomètre parcoru.

(a) Si x représente le nombre de kilomètres d'une course et y le prix de cette course, trouve une formule qui exprime y en fonction de x.

(b) Pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 2{,}5$, $x = 3$ et $x = 3{,}5$, calcule le prix de la course.

(c) Esquisse le graphique qui exprime la correspondance entre x et y. Reporte les points trouvés en (b) et complète grâce à la formule trouvée en (a).

(d) Sur le graphe note les points A dont l'abscisse vaut 4 et B dont l'ordonnée vaut 8,9. Que représentent ces points en termes de kilomètres parcourus et de prix ?

Exercice 2

Une équation historique !

FA220 Héritage

Résous ce problème posé par Leonhard Euler (voir p. 138).

Septieme queſtion. Un pere laiſſe quatre fils, qui partagent ſon bien de la maniere qui ſuit :

Le premier prend la moitié de l'héritage, moins 3000 livres.

Le ſecond prend le tiers ; moins 1000 l.

Le troiſieme prend exactement le quart du bien.

Le quatrieme prend 600 livres, & la cinquieme partie du bien.

De combien étoit l'héritage, & combien chaque fils a-t-il reçu ?

Exercice 3

Un peu de théorie.

1. Démontre que si r est un nombre réel qui est solution de l'équation $f(x) = g(x)$, alors r est aussi solution de l'équation $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$.
2. Démontre que si r est u nombre réel qui est solution de l'équation $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$, où h est une fonction qui ne s'annule pas, alors r est aussi solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 4

Problèmes.

1. Une voiture a consommé 7,2 litres de carburant pour 120 km. Elle en consomme ensuite 14,4 pour les 220 km suivants. Cette situation est-elle décrite par un phénomène de proportionnalité ?
2. A 3 ans Jonas mesurait 85 cm. A 12 ans sa taille a doublé. Cette situation est-elle décrite par un phénomène de proportionnalité ?
3. Je laisse une lampe allumée durant toute la nuit (8 heures). Si je laisse trois lampes identiques allumées, la consommation électrique triplera. Cette situation est-elle décrite par un phénomène de proportionnalité ?
4. Comment calculer l'aire totale des faces d'un cube si l'on connaît la mesure de son arête. Trouve la fonction qui donne la réponse. Et comment calculer le volume de ce même cube ?
5. En période de soldes un magasin effectue un rabais de 25% sur tous ses prix. Trouve la fonction qui donne le nouveau prix en fonction du prix initial. Et la fonction qui redonne le prix initial en fonction du prix réduit ?
6. Sur une carte au $1\colon 50'000$ la distance mesurée entre deux sommets alpins est de 5 cm. Quelle est la distance réelle à vol d'oiseau entre ces deux sommets ?
7. Lors de la descente du Lauberhorn les coureurs partent de 2315 m pour arriver à 1290 m. Sur une carte au $1\colon 25'000$ la longueur de la course est de 17,3 cm. Quelle est la pente moyenne de cette descente ?
8. Que signifie le panneau routier en forme de triangle qui indique “12%” ? Et quelle route est plus raide, celle qui fait 12% ou celle qui mesure 12° ?

Exercice 5

1. Résoudre l'équation $x^2 - 1 = 0$ dans les ensembles de définition suivants. Pour les trois premiers ensembles tu peux essayer toutes les possibilités “à la main” et vérifier quels nombres sont des solutions.

(a) $E = \{1; -1; 5; -6\}$;
(b) $F = \{3; 1; 0; -5\}$;
(c) $G = \{2; 7; 3; -12\}$;
(d) $H = \mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ dans les ensembles de définition suivants.

(a) $E = \{5; 3; 2; -1; -2; -4\}$;
(b) $F = \{5; 3; 1; -4; -5\}$;
(c) $G = E \cup F$;
(d) $H = E \cap F$.

Exercice 6

Résolution graphique. On demande de trouver les solutions des équations suivantes par voie graphique. C'est une méthode approximative mais utile pour comprendre la signification de la résolution d'une équation. De plus, il n'y a parfois pas de méthode algébrique et les mathématiciens sont obligés de recourir à des solutions approximatives !

1. $x - 10 = 26 - 2x$. On demande de dessiner les graphes des fonctions $f(x) = x - 10$ et $g(x) = 26 - 2x$.
2. $2x - 1 = 7 - x^2$. On demande de dessiner les graphes pour des valeurs de $x \in [-5; 5]$.
3. $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$. On demande les solutions au dixième ! En observant la forme du graphe de cette fonction cubique, tu trouveras les solutions approximatives aux endroits où la fonction *change de signe*. Il s'agit alors de tester les valeurs de x de 0,1 en 0,1 et trouver celle pour laquelle l'expression $x^3 + x^2 - 3x - 3$ est la plus proche de zéro. Si on constate par exemple que la fonction s'annule autour de 4, on essaiera les valeurs de x égales à 4, puis 4,1 et 3,9, puis 4,2 et 3,8, etc.

Exercice 7

Equations équivalentes I. Réduis les expressions polynomiales de ces équations, puis résous-les en utilisant les règles d'équivalence vue au cours :

(a) $3x - 2x = 9$
(b) $5(x + 4) - 4x - 20 = 2(x - 5) - 2x$
(c) $(1 - x) - (1 - 2x) = 3$
(d) $11x - (x + 2x + 3x + 4x) = 6(3x + 2) - 2(9x - 5)$
(e) $10x - (x + 2x + 3x + 4x) = 6(3x + 2) - 2(9x - 5)$
(f) $3\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x\right) = 8$

Exercice 8

Equations équivalentes II. On donne dans chaque partie deux équations. Réduis les équations et détermine, sans nécessairement résoudre les équations, si elles sont équivalentes.

(a) $5 + 2x + 3x - 12 - 4x + 7 = 8$ et $x = 8$.
(b) $15x - (7x + 8) = 3x + 2$ et $3x + 10 - (8 - 5x) = 3(x + 3) - 7$
(c) $\frac{x}{2} + \frac{5x}{3} = 5 + 2x$ et $\frac{13x}{6} = \frac{10}{2} + \frac{5x}{3} + x - \frac{2x}{3}$
(d) $(x - 2)(x + 2) = x + 1$ et $x^2 - 7 + 3 = 5(x + 1) - 4x - 4$
(e) $x^2 + 4x + 4 = 5x + 2$ et $(x + 2)^2 = 12x - 7(x + 2) + 15$
(f) $(x - 5)(x - 4) = 6$ et $(x - 3)(x - 6) + 2 = 6$.

Exercice 9

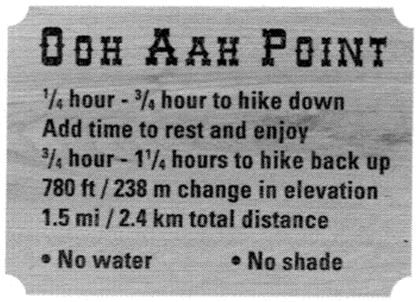
FA28 Grand Canyon

Parti en vacances aux Etats-Unis, Fabio prévoit de faire une randonnée dans le Grand Canyon. Il lit le panneau ci-contre :

a) Comment passe-t-on des kilomètres aux miles ?

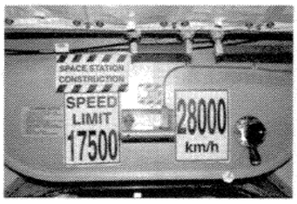
b) Comment passe-t-on des pieds (ft = feet) aux mètres ?

c) Représente ces deux situations dans deux graphiques différents.



La NASA *(National Aeronautics and Space Administration)*, l'administration gouvernementale responsable du programme spatial des Etats-Unis, n'est pas à l'abri des problèmes de transformations d'unités ; ses scientifiques ont avoué qu'une erreur de calcul, due à une confusion entre *miles* et *kilomètres*, avait provoqué l'échec d'une mission.

En 1999, une sonde avait atteint Mars, mais s'était écrasée dès son premier passage au-dessus de la face cachée de la planète. La NASA avait plus tard révélé que ses ingénieurs s'étaient embrouillés lors de la simple conversion d'unités métriques en unités anglo-saxonnes d'une information concernant une trajectoire.



La NASA indique, de plus, que seuls les Etats-Unis, la Birmanie et le Liberia utilisant toujours les miles pour mesurer les distances, ses projets sont désormais réalisés en utilisant uniquement le système métrique et les unités du Système international.

Exercice 10

1 **a** Arlette et Jean-Pascal sont chargés de résoudre, au tableau noir, l'équation suivante : $x^2 = 4$.

Arlette écrit :

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x+2)(x-2) &= 0 \\ x+2 = 0 \quad &\text{ou} \quad x-2=0 \\ x = -2 \quad &\text{ou} \quad x = 2 \qquad S = \{-2; 2\}. \end{aligned}$$

Jean-Pascal écrit :

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \sqrt{4} \\ x &= 2 \qquad S = \{2\}. \end{aligned}$$

Peux-tu expliquer l'erreur commise par l'un des deux élèves ?

b Une deuxième équation leur est proposée : $x(2x-1) = x(x+2)$

Arlette écrit :

$$\begin{aligned} x(2x-1) - x(x+2) &= 0 \\ x(2x-1-x-2) &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x &= 3 \qquad S = \{0; 3\}. \end{aligned}$$

Jean-Pascal écrit :

$$\begin{aligned} x(2x-1) &= x(x+2) \\ 2x - 1 &= x + 2 \\ 2x - x &= 2 + 1 \\ x &= 3 \qquad S = \{3\}. \end{aligned}$$

Et cette fois, qui a commis l'erreur et laquelle ?

2 Vincent se rappelle que, pour résoudre une équation, on place les « termes en x » à gauche et les autres à droite. Il opère ainsi :

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 5 &= 9x - 4 - 3x^2 \\ x^2 - 3x - 9x + 3x^2 &= -4 - 5 \\ 4x^2 - 12x &= -9 \\ 4x(x-3) &= -9 \end{aligned}$$

... et il ne peut achever son travail !

Quelle erreur a-t-il commise au départ ? Tente, à ton tour, de résoudre l'équation.

Exercice 11

Equations fruitées : Le buzz sur internet (février 2016)