

Cours Euler: Série 19

le 27 janvier 2021

Exercice 1

Utilise les propriétés des puissances pour simplifier au maximum les expressions suivantes. On rappelle que la notation $\mathbb{R}_0$ signifie $\mathbb{R}^*$ avec nos conventions.

131. Calcule ($a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$) :

1^{re} série

1) $2a^2 \cdot 3a^4$

7) $(-5a^2b^3)^3$

2) $(-3b^2)(-2b^3)$

8) $-(-2a^2b)^2$

3) $4a^2(-2b^2)$

9) $\left(\frac{1}{2a^2}\right)^3$

4) $3a^3b^2(-5a^5b^4)$

10) $\left(\frac{-3b^3}{4}\right)^2$

5) $(2a^2)^3$

11) $\left(\frac{-a^2}{b^5}\right)^3$

6) $(-3b^4)^2$

12) $- \left(-\frac{a}{b^4}\right)^2$

2^e série

1) $(-2a^2 \cdot a^3)^2$

6) $\left(-\frac{3}{5}a^3\right) \cdot \left(\frac{25}{9}a^2\right)$

2) $(-3a^2b \cdot ab^2)^3$

7) $(0,2a^2)(0,1a^3)^2$

3) $(-4a^2b)^2(2ab)^3$

8) $2a^5 - (-3a^2)^3$

4) $(-4a^3b^3)^2 + (2a^2b^2)^3$

9) $- \left(\frac{-2a^3b}{3ab^3}\right)^2$

5) $\left(\frac{2a^3}{3a}\right)^2$

10) $9a \left(\frac{4b}{6a}\right)^3$

Exercice 2

Partie A. Calcule les expressions suivantes en utilisant les propriétés des puissances rationnelles (sans passer par des racines).

(a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$

(c) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{-\frac{3}{4}}$

(e) $\frac{27^{\frac{4}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

(b) $7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$

(d) $\frac{2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}$

(f) $(-27)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-1}$

Partie B. Ici $a > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Ecris les expressions suivantes à l'aide d'exposants :

- (a) $\sqrt{a}$, $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt{a^7}$, $\sqrt{a^2}$
 (b) $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^9}$, $\sqrt[4]{a^{12}}$, $\sqrt[4]{a^{18}}$
 (c) $\sqrt{a^0}$, $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[4]{a^4}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$, $\frac{\sqrt[16]{a^8}}{\sqrt[7]{a^{28}}}$
 (d) $\sqrt{\frac{a^3}{a^6}}$, $\sqrt[8]{\frac{a^{24}}{a^{12}}}$, $(\sqrt[7]{a^6})^2$
 (e) $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[3]{a^{2n}}$, $\sqrt[3m]{a^{6n}}$,
 (f) $\frac{a^n}{\sqrt[m]{a^0}}$, $\sqrt[2m]{\frac{a^{3n}}{a^{2n}}}$, $\frac{\sqrt[8m]{a^{2n}}}{\sqrt[3m]{a^n}}$

Partie C. Ici $a > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Ecris les expressions suivantes sous forme de racine et de puissance :

- (a) $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, $a^{\frac{7}{1}}$
 (b) $a^{\frac{4}{6}}$, $a^{\frac{16}{12}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$
 (c) $a^{\frac{1}{m}}$, $a^{\frac{n}{m}}$, $a^{-\frac{1}{m}}$
 (d) $a^{-\frac{n}{m}}$, $a^{\frac{2n}{6m}}$

Exercice 3

13. Calcule, sans l'aide de ta calculatrice, en ne laissant ni exposant ni racine dans ta réponse :

- 1) $\sqrt{81}$ 5) $\sqrt[4]{16^2}$
 2) $\sqrt[3]{27}$ 6) $\sqrt[3]{8^{-1}}$
 3) $\sqrt[3]{-125}$ 7) $\sqrt[6]{4^{-9}}$
 4) $-\sqrt[3]{8}$ 8) $\sqrt[3]{-2^6}$

14. Calcule à l'aide de ta machine, la valeur approchée de la racine cubique à 10^{-2} près par défaut des réels suivants :

- 1) -65 4) $\sqrt{456}$
 2) π 5) $1 - \sqrt{3}$
 3) $\sqrt{5}$ 6) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$



15. En utilisant les propriétés des racines nièmes, effectue et simplifie :

- 1) $\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{3^7}$ 3) $\sqrt[3]{a^4} \sqrt[3]{a^5}$
 2) $\sqrt[3]{16} \sqrt[3]{32}$ 4) $\frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{2}}$

16. ★

Rends rationnels les dénominateurs des fractions suivantes :

- 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$
 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ 5) $\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}}$
 3) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$ 6) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}$

17. Calcule le carré et le cube de :

- 1) $\sqrt[3]{2}$ 3) $\sqrt[3]{3} + 1$
 2) $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ 4) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

18. Écris plus simplement et donne les conditions d'existence :

- 1) $\sqrt{\sqrt{a^2}}$ 3) $\sqrt{\sqrt[3]{b^2}}$
 2) $\sqrt[3]{\sqrt{b^2}}$ 4) $\sqrt{\sqrt[3]{-a^2}}$

19. Effectue et simplifie :

- 1) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}$ 2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{3}}$

Exercice 4

Un peu de théorie. On demande une démonstration avec tous les détails et les justifications !

- (a) Démontre que $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ si n est pair.
 (b) Démontre les propriétés des racines (2) (racine d'un quotient) et (5) (produit de deux racines d'un même nombre) de la Proposition 2.4.
 (c) Démontre la propriété des puissances rationnelles (2) : $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$. Tu peux t'inspirer de la démonstration du film sur les puissances rationnelles, sans oublier de corriger la petite erreur qui s'est glissée à la dernière ligne...

Exercice 5

Pour 20. et 21., utilise les *propriétés des puissances rationnelles* pour simplifier les expressions.

20. Écris sous la forme d'une puissance de a ($a \in \mathbb{R}_0^+$) les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant négatif, ni fractionnaire :

1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$

5) $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$

2) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

6) $\left(\frac{2}{a^{\frac{-1}{2}}}\right)^3$

3) $a^{-\frac{1}{2}}a^2$

7) $a^{1,25}a^{1,50}$

4) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

8) $\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}$

21. ★

Utilise les exposants fractionnaires pour simplifier les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant négatif, ni fractionnaire ($a \in \mathbb{R}_0^+$) :

1) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}$

5) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{a^2}}$

2) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a}$

6) $\left(\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}}{a\sqrt{a^{-2}}}\right)^3$

3) $\sqrt[3]{a}\sqrt{a}$

4) $\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$

7) $\frac{27a^{-2}\sqrt{a^4}}{64\sqrt{a}\sqrt{a}}$

Exercice 6

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses.

1. $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = a + b$ si $a, b \in \mathbb{R}$

4. $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{1}{2}}$

2. $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = a - b$ si $a, b \in \mathbb{R}_+$

5. $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{-2}$

3. $\sqrt[n]{x^{3n}} = x^3$ si $x \in \mathbb{R}_+$

6. $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

Exercice 7

Traduction. Traduis les phrases suivantes par une expression littérale.

- (a) Je choisis un nombre a , je le multiplie par 4, puis j'ajoute 5 au résultat.
- (b) Je choisis un nombre b , je lui ajoute 5, puis je multiplie par 4 le résultat.
- (c) Je choisis un nombre c , je lui ajoute le produit de 4 par 5.
- (d) Je choisis un nombre d , je lui enlève 5, puis je multiplie par 4 le résultat.
- (e) Je choisis un nombre e , je le multiplie par 5, puis j'enlève 4 au résultat.
- (f) Je choisis un nombre f , je le multiplie par 4, puis j'ajoute 4 au résultat.
- (g) Je choisis un nombre g , je l'élève au carré, puis j'ajoute 7 au résultat.
- (h) Je choisis un nombre h , je lui ajoute 7, puis j'élève au carré le résultat.
- (i) Je choisis un nombre naturel n et je lui ajoute les deux nombres naturels consécutifs.

Exercice 8

Monômes. Dans cet exercice toutes les lettres (x, y, z, m, a, b, u) sont des indéterminées !

a. Trouve le coefficient, la partie littérale et le degré des monômes suivants :

$$-5x \quad 2z^3 \quad \frac{9}{2}y^8 \quad -0,02 \quad m^4 \quad 3x^2yz \quad \frac{ab}{2}$$

b. Dans la liste suivante quels sont les monômes semblables ?

$$5x \quad 5y \quad \frac{9}{2}y^3 \quad xy \quad \frac{x}{2} \quad (xy)^2 \quad \sqrt{2}y^3$$

c. Pour réduire une expression littérale comme $6b \cdot 3b$, il faut comprendre que la juxtaposition représente un produit, puis utiliser les propriétés de commutativité de la multiplication :

$$6b \cdot 3b = 6 \cdot b \cdot 3 \cdot b = 6 \cdot 3 \cdot b \cdot b = 18 \cdot b^2 = 18b^2$$

Fais de même dans les cas suivants :

1. $4a \cdot 3$

3. $z \cdot u$

5. $-10x \cdot (-10x) \cdot (-10)$

2. $12x \cdot 2x$

4. $4z \cdot 1,5 \cdot 2z$

6. $y \cdot y \cdot 4z$

d. Voici quatre monômes $A = 3x^2$, $B = -\frac{x}{3}$, $C = 12$ et $D = 12x^3$. Calcule les expressions

1. AB

3. $D - 4A$

5. $(A + B)(A - B)$

2. $A + B$

4. $AC + B^2$

6. $CD - AB$

Exercice 9

Carrés magiques. On dit qu'un carré est magique si la somme des termes de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales donne la même réponse.

59.

Ces carrés sont-ils magiques pour l'addition ?

x	$3x - 2$	$2x + 2$
$3x + 2$	$2x$	$x - 2$
$2x - 2$	$x + 2$	$3x$

x	12	$2x$
$2x + 4$	$x + 3$	5
8	$2x - 3$	$x + 7$

Les carrés suivants sont-ils magiques pour la multiplication ?

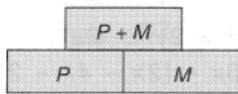
x^2	x^3	x^4
x^5	x^3	x
x^2	x^3	x^4

2	$2x^2$	$x + 1$
$0,5x^2$	$2x$	4
$4x$	1	x^2

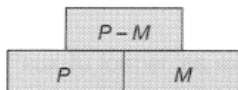
Exercice 10

42. Faire le mur

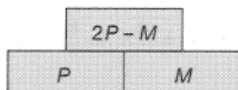
- a) On passe d'un étage à l'autre en appliquant la règle suivante :



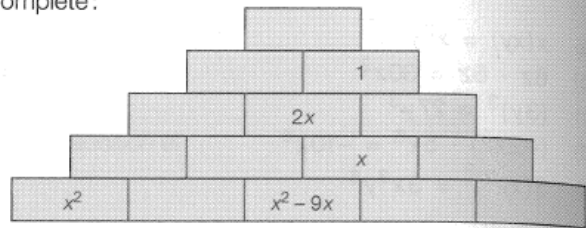
- b) Ici, la règle devient :



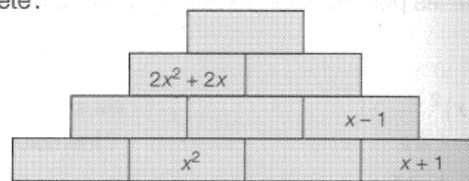
- c) Et ici :



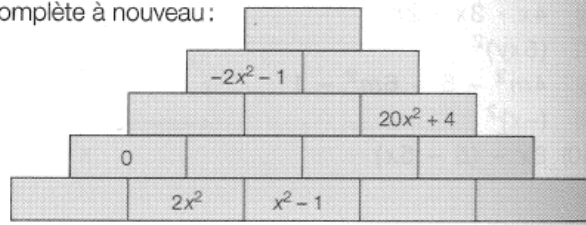
Complète :



Complète :



Complète à nouveau :



Il y a encore un exercice calculatoire et un case-tête qui ne seront pas corrigés par les assistants, mais il te sera facile de vérifier si tes réponses sont correctes grâce au corrigé. L'exercice suivant a un rapport étroit avec le sujet étudié, mais il est difficile !

Exercice 11

Tiré du programme PROMYS. Pour réfléchir à un problème proposé aux gymnasiens de plus de 15 ans pour pouvoir participer à une école d'été de mathématiques !

Si le polynôme $(x+1)^{1000}$ est développé, combien de *coefficients* sont impairs ? Combien ne sont pas divisibles par 3 ? par 5 ? Peut-on généraliser ?

Exercice 12

La calculatrice est autorisée pour cet exercice où les réponses sont demandées au millième, si elles ont un sens. Attention à l'ordre des opérations !

Série 1. 1) $\sqrt[3]{7}$ 2) $\sqrt[5]{2^3}$ 3) $\sqrt[7]{-3^2}$ 4) $\sqrt[7]{(-3)^2}$ 5) $\sqrt[6]{1/3}$ 6) $\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Série 2. 1) $\left(2 + \frac{1}{7}\right)^{1/2}$ 2) $3^{1/4} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{1/3}$ 3) $\sqrt{(2+3)^{\frac{1}{3}}}$ 4) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}}$

Série 3. Si $a = \frac{2}{7}$, $b = \sqrt{3}$ et $c = -\frac{2}{3}$, utilise les mémoires de ta calculatrice pour trouver :

1) $a + b\sqrt[3]{c}$ 2) $(a+b)\sqrt[3]{c}$ 3) $(a+b)^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$ 4) $\left[(a+b)c^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$
 5) $\sqrt{a+b^{\frac{1}{2}}}$ 6) $(\sqrt{a+b})^4$ 7) $(a+b+c)^{\frac{1}{2}}$ 8) $\left(\frac{a}{b+c}\right)^{-\frac{2}{3}}$