Cours Euler: Mini-Série 17

le 13 janvier 2021

Exercice 1

Adapte la preuve du cours que $\sqrt{2}$ est irrationnel pour montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel. (Attention, c'est plus compliqué que simplement remplacer les 2 par des 3 ! En effet, il te faut adapter à cette situation (et prouver) le lemme qui dit que si n^2 est pair, alors n est pair.)

Est-ce vrai qu'en général $\sqrt{n}$ est irrationnel pour tout nombre entier naturel n ? Si oui, montre-le. Sinon, donne un contre-exemple. Qu'en est-il lorsque n est un nombre premier ? Essaie de justifier.

Exercice 2

Traite chaque ligne pour elle-même :

n°	Question	A	B	C	D	E
1	Quels sont ces nombres ?	l'inverse de $\frac{12}{4}$	cinq de moins que $\frac{12}{4}$	la moitié de $\frac{12}{4}$	l'opposé de $\frac{12}{4}$	le triple de $\frac{12}{4}$
2	Ces nombres sont-ils plus grands que 1 ?	$\frac{25}{30}$	-10	3,01	10^{-3}	10^3
3	Qui suis-je ?	le plus grand nombre inférieur à -10	deux fois plus petit que $\frac{9}{7}$	plus grand que $-2{,}03$	16,5 unités de moins que $-17{,}8$	trois fois plus grand que $\frac{16}{3}$
4	Ces nombres sont-ils plus grands que -1 ?	10^{-2}	$\frac{3}{10}$	-5	$\frac{-7}{4}$	$-1{,}01$
5	Ces nombres sont-ils plus petits que -1 ?	$\frac{2}{7}$	$\frac{23}{-23}$	$-0{,}123$	$\frac{5}{4}$	$-1{,}00001$
6	Quels sont les nombres qui ne valent ni 0 ni 1 ?	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{0}{-1}$	10^{-1}	2^0	0^2

Exercice 3

Voilà une méthode pour obtenir des approximations successives de racines carrées sans utiliser la touche « racine » de la calculatrice.
En n'utilisant que la touche « au carré » de ta calculatrice, donne des encadrements du nombre $\sqrt{2}$ à l'unité, au dixième, au centième, ..., à 10^{-6} près. Cela signifie que tu dois trouver deux nombres décimaux à 0 (puis 1, 2, 3, ...) décimales qui sont les plus proches de $\sqrt{2}$, inférieur et supérieur respectivement. Par exemple, à l'unité l'encadrement est

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

car $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$. On calcule ensuite $(1{,}1)^2 = 1{,}21$, puis $(1{,}2)^2 = 1{,}44$, puis $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ et $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ avant de dépasser 2 avec $(1{,}5)^2 = 2{,}25$. Ainsi $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
Donne, en suivant la même méthode, l'approximation au 10000-ième de $\sqrt{3}$. Pour terminer effectue le même travail pour $\sqrt{9{,}7344}$.

Exercice 4

NO208 A la racine

Réponds ou calcule.

a) Quel est le nombre dont le carré vaut 10 000 ?

b) 3^2

c) Combien vaut la racine carrée de 36 ? Et la racine cubique ?

d) $\sqrt{100}$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

f) Pourquoi $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$?

g) Existe-t-il un nombre dont le carré vaut -16 ?

h) $\sqrt{0}$

i) $\sqrt[3]{1000}$

j) Peux-tu extraire la racine carrée du nombre -4 ?

k) $-\frac{5^2}{3}$

l) $\sqrt{1}$

m) $-\sqrt{81}$

n) $\sqrt{18}$

o) Quel est le nombre dont le carré est 49^2 ?

Exercice 5

Un casse-tête. Ecris le nombre 2000 en utilisant une seule fois chacun des nombres $1, 2, 3, 4$ et 5.

Exercice 6

NO71 Du plus grand au plus petit

Classe, dans l'ordre décroissant, les nombres de chaque ligne.

a)	1^2	0^2	0^1	2^1	2^0	2^2
b)	10^2	2^{10}	$2^2 \cdot 10$	$(10 \cdot 2)^2$	$10^2 \cdot 2^2$	200^2
c)	3355	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	3^5	5^3	$3 \cdot 10^5$	$(5 \cdot 10)^3$
d)	$3^3 \cdot 3^4$	3^{12}	3^7	27^2	9^3	81^2
e)	$10^5 \cdot 10^2$	$10^2 \cdot 10^6$	$10^{(3+5)}$	1000^3	100^4	$1000 \cdot 10\,000$
f)	$2 \cdot 3^4$	34^2	$2 \cdot 3 \cdot 4$	234^1	$2^3 \cdot 4$	$2^4 \cdot 3$

Exercice 7

NO211 Puissances de dix

L'opération 10 000 · 100 peut s'effectuer en utilisant l'écriture des puissances de dix :

$$10000 \cdot 100 = $$
$$10^4 \cdot 10^2 = $$
$$10^{4+2} = 10^6 = 1\,000\,000.$$

Procède de la même manière pour trouver les résultats des opérations suivantes.

a) 1000 · 1000 = ...

b) 100 000 · 1000 = ...

c) 10 000 · 0,001 = ...

d) 1000 · 0,001 = ...

e) 0,001 · 0,01 = ...

f) 0,0001 · 100 · 0,01 = ...

g) $0{,}01^3$ = ...

h) 0,01 : 100 = ...

i) 100 000 : 0,01 = ...

j) 10 : 10 000 = ...

puissance	nombre	nom
...		
10^{24}		quadrillion
10^{21}		trillard
10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	trillion
10^{15}	1 000 000 000 000 000	billiard
10^{12}	1 000 000 000 000	billion
10^{9}	1 000 000 000	milliard
10^{6}	1 000 000	million
10^{3}	1 000	mille
10^{2}	100	cent
10^{1}	10	dix
10^{0}	1	un
10^{-1}	0,1	dixième
10^{-2}	0,01	centième
10^{-3}	0,001	millième
10^{-6}	0,000 001	millionième
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième
10^{-12}	0,000 000 000 001	billionième
10^{-15}	0,000 000 000 000 001	billiardième
10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	trillionième
10^{-21}		trilliardième
10^{-24}		quadrillionième
...		

Les calculatrices ne peuvent souvent pas afficher plus de 10 chiffres, mais elles permettent facilement de transformer les nombres de notation décimale en notation scientifique (souvent avec une touche EE ou un mode noté SCI) ; le mode d'affichage n'est pas forcément bien clair : « 3 E 11 » signifie bien $3 \cdot 10^{11}$, par exemple.
On trouve encore parfois la touche (ou le mode) ENG : cette notation, appelée « ingénieur », utilise également les puissances de dix, mais en n'en conservant que les exposants qui sont des multiples de 3 (10^3, 10^6, 10^9, 10^{-9}...) ; le nombre multiplié par la puissance de dix sera ainsi supérieur ou égal à 1 et inférieur à 1000.
Par exemple : 72 500 000 s'écrira $72{,}5 \cdot 10^6$. Cette notation permet de transformer plus facilement les unités principales (passage de nano à micro, milli, kilo, méga, etc.).

A titre indicatif, dans les pays anglo-saxons, 1 milliard se dit « one billion » !

Exercice 8

1. Démontre la propriété (4) des fractions de nombres réels, c'est-à-dire que si x, y sont des nombres réels non nuls, alors $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$. (Utilise la définition de l'inverse et les propriétés 2 et 3 des fractions de nombres réels).
2. Démontre la propriété (2) des fractions de nombres réels (amplification).

Exercice 9

Donne la réponse au million de synapses près pour b) et au milliard de neurones près pour c).

NO213 Faites marcher vos neurones !

Notre cerveau est constitué d'environ cent milliards de neurones, chacun d'eux étant connecté à dix mille de ses semblables.

A l'aide de puissances de dix, exprime les nombres suivants.

a) Le nombre de neurones présents dans notre cerveau.

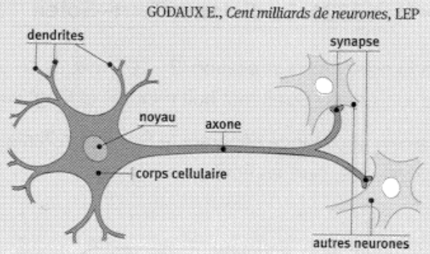
b) Le nombre de connexions dans ce même cerveau.

c) A la naissance, un enfant possède tous ses neurones.
En vieillissant, leur nombre diminue d'environ cinquante mille par jour.
Après combien d'années (365 jours) avons-nous épuisé notre réserve ?

«[...] Un neurone ressemble à une pieuvre, avec des bras qui partent dans tous les sens. A partir d'un corps cellulaire central, plus ou moins sphérique, rayonnent plusieurs expansions. Il y en a de deux types. Un bras cellulaire est soit un dendrite, soit un axone. Le type de neurone le plus répandu dans le cerveau possède plusieurs dendrites, mais un seul axone. [...]

L'axone transporte l'information neuronale vers d'autres neurones du cerveau. Cela nous conduit à introduire un nouveau mot clé : la synapse. Celle-ci est la zone où l'extrémité de l'axone entre en contact avec un autre neurone. Les contacts synaptiques sont les endroits privilégiés où l'information passe d'un neurone à l'autre. On les trouve sur les corps cellulaires et sur les dendrites. Il n'y en a pas sur l'axone. L'information atterrit sur le neurone au niveau de son corps cellulaire et de ses dendrites. Elle en sort par l'axone. [...] »

GODAUX E., *Cent milliards de neurones*, LEP



Exercice 10

Notation scientifique.

Partie A. Affiche un maximum de 9 sur l'écran de ta calculatrice. Ajoute 1. Que se passe-t-il ? Pourquoi ? Quel est le plus grand nombre que tu peux afficher avec ta calculatrice ?

Partie B. Écris chaque nombre proposé en notation scientifique, effectue ensuite et donne la réponse du calcul en notation scientifique, puis en notation décimale :

(a) $2000 \cdot 0{,}0014$

(b) $0{,}024 \cdot 0{,}0011$

(c) $(0{,}07)^2$

(d) $(-21{,}2)^2$

(e) $0{,}0012 : 0{,}04$

(f) $15000 : 0{,}005$

(g) $(-250)^2 \cdot (-0{,}001)^3$

(h) $(0{,}05)^{-1} : (0{,}005)^{-2}$

Partie C. Ecris les nombres qui apparaissent dans les phrases suivantes en notation scientifique :
- Certains ordinateurs exécutent une opération en 0,00000001 seconde.
- La distance de la Terre à la Nébuleuse d'Andromède est de 2 millions d'années-lumière (donne la réponse en kilomètres ! Rappelons que la lumière parcourt $3 \cdot 10^5$ kilomètres par seconde).

Exercice 11

NO194. Une légende prétend que l'inventeur de l'échiquier est Sissa, un sage oriental. Il aurait ainsi réussi à distraire un roi, qui, voulant le remercier, lui offrit de choisir une récompense. Sissa voulait seulement "un peu de riz". Le roi lui demanda alors combien et Sissa répondit que sur la première case de l'échiquier il voudrait un grain de riz, puis deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz.
Le roi fut surpris et amsué par une demande aussi modeste. Est-ce que cette demande est aussi modeste que cela ? Combien cela coutera-t-il au roi en nombre de grains de riz ?

Exercice 12

Un exercice historique et facultatif sur le calcul de π pour finir. Tu trouveras ci-dessous le calcul des quatre premières approximations.

215. Les chasseurs de π

Newton, mathématicien anglais du XVII[e] siècle, a trouvé que :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Un autre mathématicien, le Suisse Léonard Euler, a montré, quant à lui, que :

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Au XVII[e] siècle toujours, un troisième mathématicien, Lord Brouncker, a utilisé une présentation encore plus surprenante à l'aide de ce que l'on appelle une fraction continue :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

n° du terme : 1 2 3 4 5 6 …

Quelles sont les approximations successives de π que tu obtiens en prenant 1 terme, puis 2 termes, puis 3 termes et ainsi de suite, pour chacun de ces trois développements ?

Etape	1	2	3	4
Newton	3	3,125	3,139062	3,141155
Euler	3,130169	3,139785	3,1410	3,141348
Brouncker	4	2,666	3,4666	2,895