Cours Euler: Série 12

le 25 novembre 2020

Exercice 1

Caroline souhaite placer un point P quelque part entre les extrémités du côté $[AB]$ d'un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Le point P doit se trouver à égale distance des deux autres côtés. Ou va-t-elle le placer ?

Exercice 2

Nautile cloisonné. Trace un grand cercle de centre O et partage-le en 5 parties isométriques en traçant 5 rayons séparés par des angles de 72^o (tu peux utiliser ton rapporteur).

1. Construis les bissectrices des angles de 72^o puis celles de angles de 36^o obtenus de sorte à partager ton cercle en 20 parties isométriques. Les points d'intersection des rayons avec le cercle s'appellent $A, B, C, ...$ ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Construis la perpendiculaire au rayon $[OB$ passant par A. Elle coupe le rayon $[OB$ au point 1.
3. Construis la perpendiculaire au rayon $[OC$ passant par le point 1. Elle coupe le rayon $[OC$ au point 2.
4. Continue ainsi. Combien d'étapes faut-il pour atteindre le centre du cercle ?

Exercice 3

L'arc capable. Effectue la construction décrite par la marche à suivre suivante. Tu utiliseras la règle pour mesurer les distances et la rapporteur pour mesurer les angles.

Trace un segment $[XY]$ de longueur 7,3 cm et construis la médiatrice m de $[XY]$. Trace une demi-droite $[Xn$ qui fait un angle de 64^o avec XY et la perpendiculaire p à n passant par X.

La perpendiculaire p coupe m en un point O. Trace le cercle $(O;\overline{OX})$ centré en O et de rayon $\overline{OX}$. Il coupe m en deux points K et L. Sur l'arc de cercle $\widehat{XKY}$ place cinq points R, S, T, U et V.

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{XRY}$, $\widehat{XSY}$, $\widehat{XTY}$, $\widehat{XUY}$ et $\widehat{XVY}$?

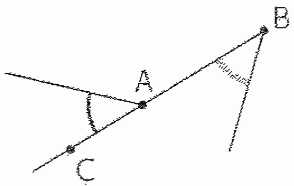
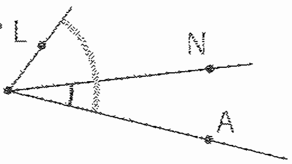
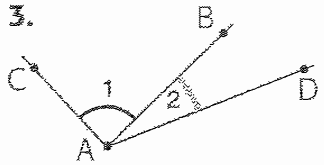
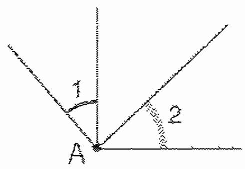
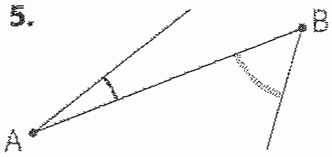
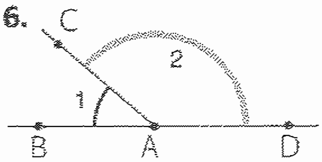
Exercice 4

Nous avons un axiome qui nous permet de reporter un segment donné sur une demi-droite donnée. Comment peut-on utiliser cet axiome pour reporter un angle donné Sab en un angle Tcd si la demi-droite Tc est donnée ? Ecris une marche à suivre claire et précise !

Exercice 5

Sur la donnée.

Dans les situations suivantes, complète le tableau :

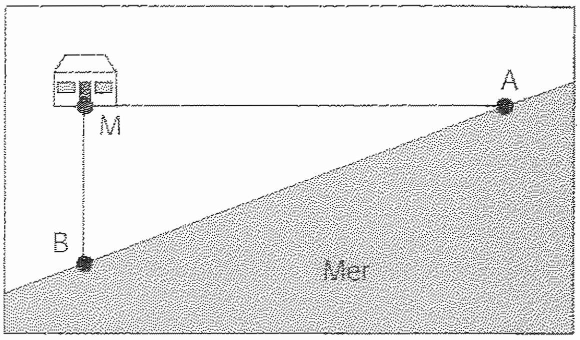
Situations	Les deux angles ont-ils un même sommet ? Si oui, cite-le.	Les deux angles ont-ils un côté commun? Si oui, cite-le.	Les deux angles sont-ils situés de part et d'autre du côté commun ?
1. 			
2. 			
3. 			
4. 			
5. 			
6. 			

Exercice 6

1 Un pêcheur réclame une route qui relierait sa maison à la côte, **par le chemin le plus court**.

L'échevin des Travaux Publics lui propose de construire cette route suivant le tracé MA.

La femme du pêcheur objecte qu'il serait préférable de tracer la route suivant MB.



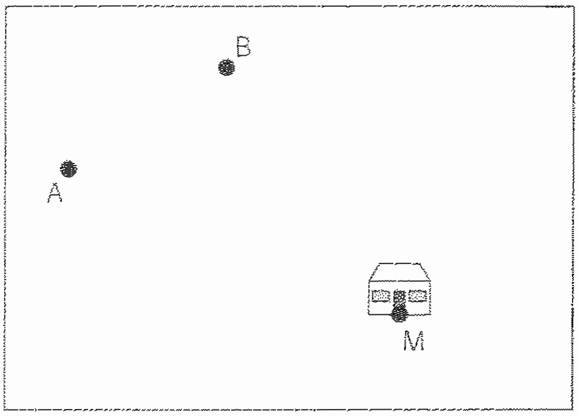
Qui a raison ? ....

Pourquoi ? ....

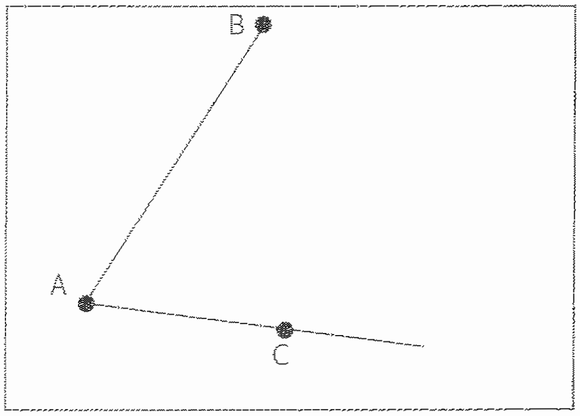
2 Un apiculteur désire placer une ruche à égale distance des massifs floraux A et B, mais le plus près possible de sa maison M.

Aide-le à trouver cet endroit ... avec précision.

Crois-tu qu'il y ait plusieurs endroits qui donnent satisfaction à l'apiculteur ? ....



3 a) Construis la **bissectrice** b de l'angle $\widehat{BAC}$.
(voir **Manuel**, page 58)



b) Porte les points M, N et P sur b. De chacun d'eux, abaisse la perpendiculaire à chaque côté de l'angle.

c) Compare les distances :

d(M, AB) .... d(M, AC) ;

d(N, AB) .... d(N, AC) ;

d(P, AB) .... d(P, AC).

d) Quelle propriété des points de la bissectrice d'un angle te suggèrent les résultats du **c)** ?

Exercice 7

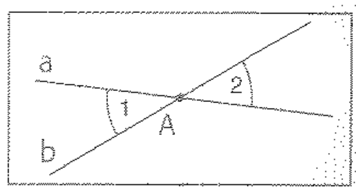
1. **Continuation théorique de l'exercice précédent.** On donne un angle rectiligne formé de deux demi-droites issues d'un sommet commun. Démontre que les points de la bissectrice de cet angle sont situés à égale distance des demi-droites formant l'angle. On utilisera le fait qu'une isométrie préserve les distances.
2. Démontre, en utilisant le théorème de la médiatrice d'un segment que tout segment contient une infinité de point.
3. Démontre que deux droites perpendiculaires se coupent. (Indication : Utilise la définition de la perpendicularité et l'axiome du demi-plan.)

Exercice 8

Dans cet énoncé, l'angle 1 est noté $\hat{A}_1$ et l'angle 2, $\hat{A}_2$. Sur la donnée.

Les droites a et b se coupent au point A.

a) Quelle(s) transformation(s) du plan applique(nt) $\widehat{A_1}$ sur $\widehat{A_2}$?

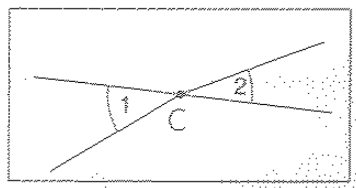


b) Compare les amplitudes de $\widehat{A_1}$ et de $\widehat{A_2}$:

c) Cite une propriété qui justifie ta réponse donnée en **b)**.

d) Les angles $\widehat{C_1}$ et $\widehat{C_2}$ du dessin ci-contre jouissent-ils de la même propriété ?

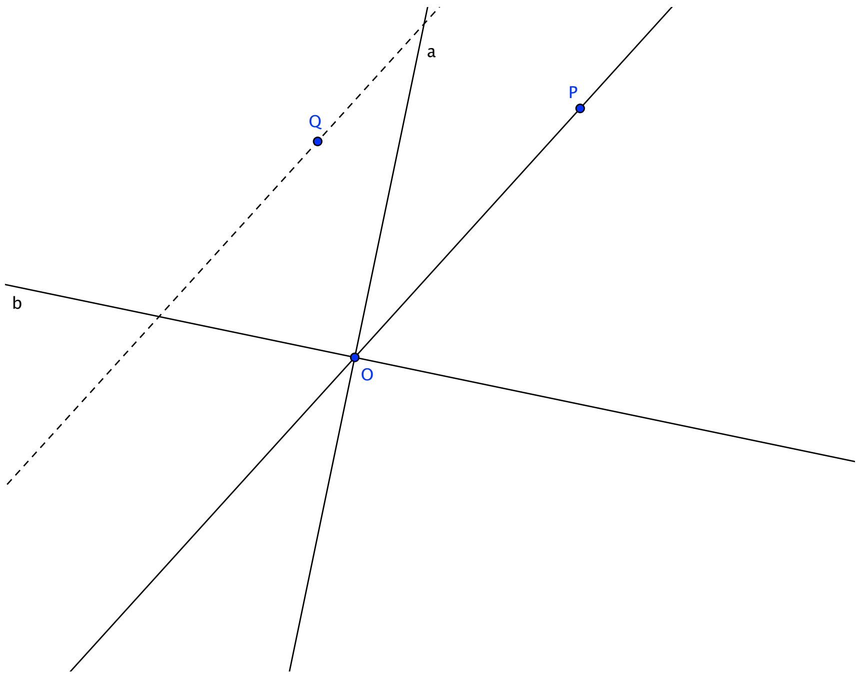
Pourquoi ?



Exercice 9

Composition de symétries. Sans parler encore de symétrie centrale, nous analysons ce type d'isométrie en considérant la composition de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires. On se donne une croix formée des droites perpendiculaires a et b se coupant en un point O. On considère la transformation f du plan donnée par $P \mapsto S_b\big(S_a(P)\big)$. En d'autres termes l'image de P est l'image par la symétrie d'axe b de $S_a(P)$.

1. Montre que l'image de O est O, mais que $f(P) \neq P$ si $P \neq O$.
2. Quelle est l'image de la droite a par f ? et celle de b ?
3. Quelle est l'image d'une droite OP si P est un point ne se trouvant ni sur a ni sur b ?
4. Montre que l'image de P se trouve sur OP à la même distance de O que P. Effectue la construction sur la figure suivante dans le cas indiqué :



5. Considère une droite m ne passant pas par O. On choisit un point Q de cette droite que nous supposerons parallèle à la droite OP étudiée précédemment. Construis l'image de cette droite dans la situation indiquée ci-dessus. Montre que l'image de Q ne se trouve pas sur m. Montre que l'image par f est une droite parallèle à OP, donc à m.

Exercice 10

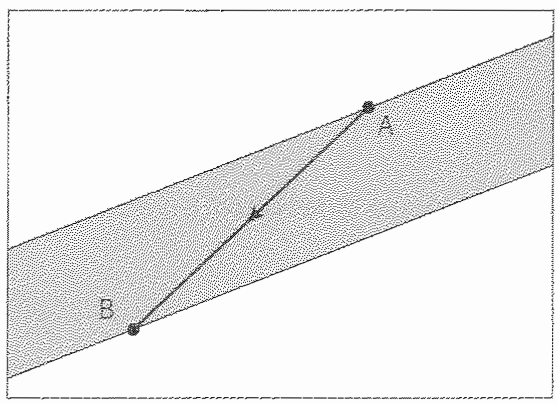
Sur la donnée.

a)

Toto voit Titine sur le trottoir d'en face.

Pour la rejoindre, il veut traverser en oblique (trajet AB).

Sa maman le traite d'imprudent et lui propose de traverser autrement.



Quel trajet lui a-t-elle conseillé pour traverser ?

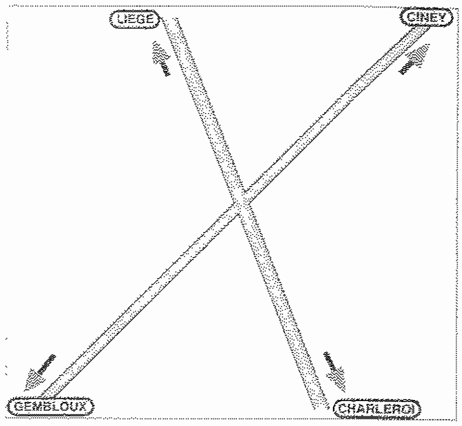
Pourquoi ?

b)

Xavier a dit un jour : « Ce qui est pratique pour mes déplacements, c'est que j'habite à 1 km de la route Gembloux-Ciney et à 0,5 km de la route Liège-Charleroi. »

Où donc pourrait se situer la maison de Xavier ?

Indique les positions possibles sur cette carte où 1 cm représente 500 m.



Exercice 11

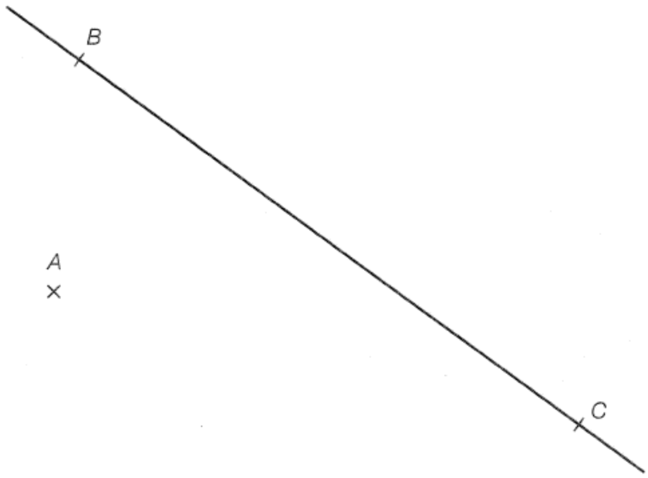
ES6 Quelle position ?

Sur le dessin ci-dessous, trace :

a) $g \mathbin{//} BC$ et passant par A;

b) $h \perp g$ et passant par A.

Que peux-tu dire de la position de h par rapport à BC ?



Exercice 12

Trace un grand triangle ABC et construis le triangle PQR dont les sommets sont les milieux de côtés du triangle ABC. Par le sommet A trace une parallèle x au côté BC, par B trace une parallèle y au côté AC et enfin par C trace une parallèle z au côté AB. Les droites x, y et z se coupent en trois points appelés X, Y et Z. Trace le triangle XYZ.

Quelles sont les dimensions de ce triangle par rapport au triangle PQR ? et par rapport au triangle ABC ?

Exercice 13

On veut démontrer le résultat suivant :

« Les isométries préservent la perpendicularité. »

On propose d'aller pas par pas dans cette démonstration, bien plus longue que n'importe quel exercice théorique qui pourrait être demandé dans le test. C'est un excellent exercice de comprendre la démarche proposée ci-dessous et de réussir à justifier tes affirmations à l'aide des axiomes de la géométrie plane ! Si tu n'arrives pas à montrer une étape, passe à la suivante en considérant l'étape comme prouvée.

Tout d'abord il faut rendre cet énoncé précis. Que signifie-t-il ? Nous avons défini la perpendicularité pour les droites. Considérons donc deux droites a et b perpendiculaire entre elles. L'énoncé parle de n'importe quelle isométrie. Considérons donc une isométrie quelconque $f : \pi \to \pi$. L'énoncé affirme que l'image de la croix perpendiculaire ab est une croix perpendiculaire $a'b'$. On va prouver cela. Je te conseille de t'aider d'un dessin pour faire les preuves.

Considère deux points A et B sur a à égale distance de l'intersection O des droites a et b. Considère un point M sur b distinct de O. L'image de a sous f est une droite a', l'image de b une droite b'. Les images de A et B sont des points A' et B' de a' et l'image de M un point M' de b'.]

1. Montre que l'image O' du point O est l'intersection de a' et b'. (Utilise le fait que deux droites ont au plus un point d'intersection.)
2. Montre que O' est le milieu du segment $[A'B']$. (Rappelle-toi la définition d'une isométrie.)
3. Montre que M' est distinct de O'. (Utiliser une propriété des isométrie montrée à la série 9.)
4. Montre que la droite b est la médiatrice du segment $[AB]$. (Utilise le fait qu'elle est perpendiculaire à a, l'axiome du report d'une distance et le théorème de la médiatrice.) Conclus-en que $\overline{AM} = \overline{BM}$ et que $\overline{A'M'} = \overline{B'M'}$.
5. Comme O' et M' sont deux points distincts tous deux équidistants à A' et B', conclus que b' est la médiatrice du segment $[A'B']$. (Utilise le théorème de la médiatrice et l'axiome de connexion qui dit que par deux points passe exactement une droite.)
6. Utilise le fait que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est perpendiculaire à la droite AB pour terminer.

Exercice 14

Un casse-tête pour le plaisir. Une colonie d'iguanes sur une petite île est constituée de 13 iguanes verts, 15 iguanes rouges et 17 iguanes jaunes. Lorsque deux iguanes de couleurs différentes se rencontrent ils changent de couleur et prennent tous deux la troisième couleur (ainsi si un iguane rouge rencontre un iguane jaune, ils deviennent verts). Est-il possible que tous les iguanes aient la même couleur après un certain temps ? Si oui, explique ce qui s'est passé !

Tiré de la rubrique d'Alex Bellos sur https ://www.theguardian.com/science/series/alex-bellos-monday-puzzle.