

Cours Euler: Série 1

le 26 août 2020

Exercice 1

Vrai ou faux? Dans chacun des cas suivants dis si l'affirmation est vraie ou fausse. Explique brièvement pourquoi (en donnant un contre-exemple explicite lorsque l'affirmation est fausse).

1. Soit n un nombre pair. Alors n est divisible par 4.
2. Soit n un multiple de 9. Alors n est divisible par 3.
3. Soit n un nombre divisible par 100. Alors 15 divise n .
4. 3 divise 171.
5. 172 est divisible par 3.

Exercice 2

Démontre en t'inspirant de la démonstration vue au cours qu'un nombre naturel à 4 chiffres est divisible par 3 si et seulement la somme de ces chiffres est divisible par 3. On utilisera a pour les milliers, b pour les centaines, c pour les dizaines et d pour les unités.

Est-ce que les nombres 1101 et 1011 sont divisibles par 3? La démonstration t'aide-t-elle à diviser ces nombres par 3?

Exercice 3

Donne les relations logiques qui existent entre les affirmations suivantes. Par exemple $A \iff C$ et $A \Rightarrow E$ sont vraies. Trouve-en au moins cinq autres qui sont vraies.

- A = Tous les hommes sont barbus.
- B = Certains hommes sont imberbes¹.
- C = Aucun homme n'est imberbe
- D = Aucun homme n'est barbu.
- E = Certains hommes sont barbus.
- F = Tous les hommes sont imberbes
- G = Il existe des hommes barbus.

Exercice 4

Démontre en t'inspirant de la démonstration vue au cours qu'un nombre naturel à 2 chiffres est divisible par 9 si et seulement la somme de ces chiffres est divisible par 9. On utilisera a pour les dizaines et b pour les unités.

Exercice 5

Démontre le critère de divisibilité par 4 : Un nombre naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Par exemple, le nombre 95'652 est divisible par 4 parce que 52 est divisible par 4.

1. « imberbe » veut dire « qui n'a pas de barbe ».

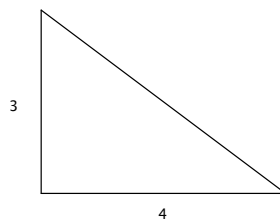
Exercice 6

Preuve par découpage I. On se basera sur le seul fait qu'un carré de côté a centimètres possède une aire de a^2 . Démontre qu'un rectangle de côtés 1 cm et 4 cm possède une aire de 4 cm^2 . En combien de coups de ciseau y arrives-tu ?

Démontre ensuite qu'un rectangle de côtés 3 cm et 4 cm possède une aire de 12 cm^2 . En combien de coups de ciseau y arrives-tu ?

Exercice 7

Preuve par découpage II. On se basera sur l'exercice précédent et le fait qu'un carré de côté a centimètres possède une aire de a^2 . On considère un triangle rectangle dont les *cathètes* mesurent 3 cm et 4 cm .



Calcule son aire. En utilisant le Théorème de Pythagore, calcule aussi son périmètre, c'est-à-dire la somme des longueurs des trois côtés.

Exercice 8

Ecris l'affirmation A comme une affirmation composée des autres affirmations indiquées. Considérons par exemple l'affirmation $A =$ « Si tu viens chez moi, tu pourras rencontrer mon frère ». On pose $B =$ « Tu viens chez moi » et $C =$ « Tu pourras rencontrer mon frère ». Alors l'affirmation A s'écrit $B \Rightarrow C$. Pour écrire la négation d'une affirmation A on pourra écrire simplement « non A ».

1. $A =$ « Il n'y a pas de fumée sans feu » avec $B =$ « Il y a de la fumée » et $C =$ « Il y a du feu ».
2. $A =$ « Qui cherche trouve » avec $B =$ « on cherche » et $C =$ « on trouve ».
3. Considère maintenant les affirmations $B =$ « Tu progresseras » et $C =$ « Tu t'exerces », et écris les affirmations qui suivent à l'aide de B et C .
 - (a) $A =$ « Si tu t'exerces, tu progresseras ».
 - (b) $A =$ « Si tu ne t'exerces pas, tu ne progresseras pas ».
 - (c) $A =$ « Tu progresseras seulement si tu t'exerces ».
 - (d) $A =$ « Tu progresseras si et seulement si tu t'exerces ».
 - (e) $A =$ « Pour progresser il faut s'exercer ».
4. Considère les affirmations $B =$ « Tu es allée à Delhi », $C =$ « Tu es allée à Dakar » et $D =$ « Tu as visité deux continents ».
Ecris l'affirmation suivante à l'aide de B , C et D .

$A =$ « Si tu es allée à Delhi et à Dakar, alors tu as visité deux continents ».

5. Idem avec $A =$ « Si tu es allée à Delhi ou à Dakar, alors tu n'as pas forcément visité deux continents ».

Exercice 9

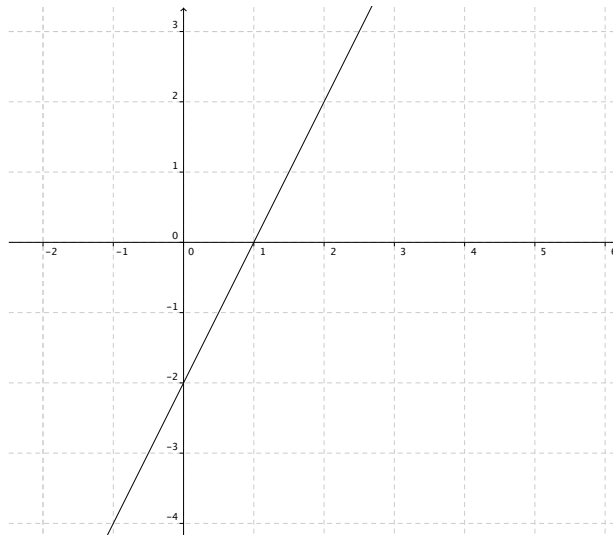
Dessine le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x$.

Exercice 10

Dessine le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2$.

Exercice 11

Reconnais-tu la fonction dont le graphe est le suivant ?

**Exercice 12**

Soit $x = 10 \cdot a + b$ un nombre à deux chiffres, a et b . On effectue les multiplications consécutives suivantes : on multiplie x par 3, puis par 13, puis encore par 7 et enfin par 37. Par exemple pour $x = 25$ on trouve 75, puis 975, ensuite 6825 et enfin 252'525. Explique pourquoi on trouve toujours un nombre à six chiffres dont les chiffres sont a, b, a, b, a et b !

Exercice 13

Un exercice difficile. Soit n un nombre entier constitué de a unités et b dizaines. Ainsi 31'969 a 9 unités et 3196 dizaines. Démontre que n est divisible par 7 si et seulement si $b + 5 \cdot a$ est divisible par 7.

Indication. Il faut donc démontrer deux choses ! D'abord que si n est un multiple de 7, alors $b + 5 \cdot a$ aussi, et *reciproquement* si $b + 5 \cdot a$ est un multiple de 7, alors n aussi.

Exemple. Pour utiliser ce critère dans le cas de 31'969 on procède comme suit. Ce nombre est divisible par 7 si et seulement si

$$3196 + 5 \cdot 9 = 3241$$

est un multiple de 7. Or, ce nombre est constitué de 324 dizaines et 1 unité. Il est donc divisible par 7 si et seulement si

$$324 + 5 \cdot 1 = 329$$

est divisible par 7. Ceci est vrai si et seulement si $32 + 5 \cdot 9 = 77$ est un multiple de 7. Ah tiens ! C'est $11 \cdot 7$. C'est donc vrai !

Est-ce que 179'886 est un multiple de 7 ? Et 123'008 ?