

# Cours Euler: Mini-Série 10

le 13 novembre 2019

## Exercice 1

**Une transformation du plan.** Considérons deux points distincts  $A$  et  $B$  du plan. On définit une correspondance  $f$  du plan dans lui-même de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A &\mapsto B \\ B &\mapsto A \\ P &\mapsto P \text{ si } P \neq A \text{ et } P \neq B \end{aligned}$$

1. Vérifie que cela définit une transformation  $f : \Pi \rightarrow \Pi$  du plan.
2. Est-ce que cette transformation transforme deux points distincts en deux points distincts ( $f$  est-elle injective) ? Explique !
3. Est-ce que tout point du plan est l'image d'un point du plan ( $f$  est-elle surjective) ? Explique !
4. Si la réponse aux deux dernières questions est positive, alors il existe un inverse. Décris cette transformation si elle existe.
5. Montre que  $f$  n'est pas une isométrie.
6. Quelle est l'image du segment  $[AB]$  par  $f$  ?

## Exercice 2

**Une autre transformation du plan.** On donne une droite  $d$  et un point  $O$  non situé sur  $d$ . On considère la correspondance  $f$  du plan définie ainsi :

1. Si  $O$  et  $P$  sont du même côté de  $d$ ,  $f(P) = P$ .
  2. Si  $O$  et  $P$  ne sont pas du même côté de  $d$ ,  $f(P)$  est l'intersection de  $OP$  avec  $d$ .
  3. Si  $P$  est sur  $d$ ,  $f(P) = P$ .
1. Vérifie que cela définit une transformation  $f : \Pi \rightarrow \Pi$  du plan.
  2. Est-ce que cette transformation transforme deux points distincts en deux points distincts ( $f$  est-elle injective) ? Explique.
  3. Est-ce que tout point du plan est l'image d'un point du plan ( $f$  est-elle surjective) ? Explique.
  4. Si la réponse aux deux dernières questions est positive, alors il existe un inverse. Décris cette transformation si elle existe.
  5. Montre que  $f$  n'est pas une isométrie.
  6. Quelle est l'image d'un segment par  $f$  ? (Examine différents cas possibles.)
  7. Quelle est l'image d'une droite par  $f$  ? (Examine différents cas possibles.)

**Exercice 3**

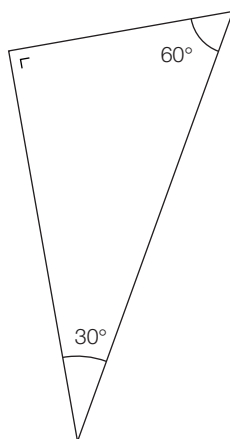
## 140. Rompre la glace

Place deux miroirs verticalement le long de deux côtés adjacents d'un de ces polygones.

Construis la figure que tu as obtenue.

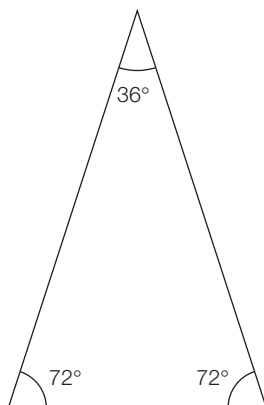
Et si tu choisis un autre polygone, arrives-tu à prévoir la figure que tu obtiendras ?

Essaie de la construire, puis vérifie.



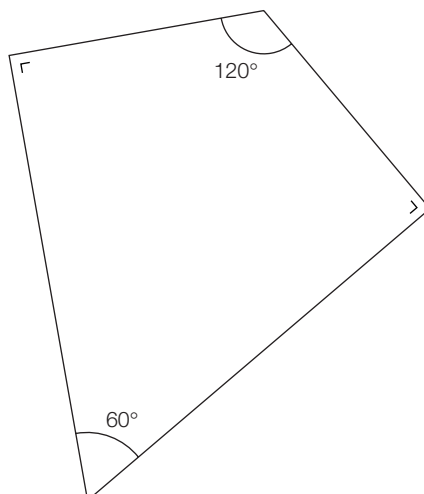


## 140. Rompre la glace (suite 1)





## 140. Rompre la glace (suite 2)



**Exercice 4**

Ecris les lettres de l'alphabet en majuscules droites. Parmi ces lettres, lesquelles admettent un axe de symétrie ? Existe-t-il des lettres qui admettent deux axes de symétrie ou plus ?

**Exercice 5****Les cercles.**

1. On considère deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de rayon  $r$  mesurant 2 cm et  $d$  est la distance qui sépare les deux centres. Dessine dans chacun des cas suivants une situation précise des deux cercles et de leur position l'un par rapport à l'autre : lorsque  $d > 2 \cdot r$ , lorsque  $0 < d < 2 \cdot r$ , lorsque  $d = 2 \cdot r$  et lorsque  $d = 0$ .
2. Etant donné un segment  $[AB]$  de longueur 5 cm, combien de cercles passent par  $A$  et  $B$  ?
3. Quel est le lieu géométrique des centres des cercles de rayon donné  $r$  passant par un point donné  $C$  ?

**Remarque.** Si on ne suppose pas que l'axiome (D7) est vrai, on pourrait travailler dans une géométrie où les points du plan ont des coordonnées rationnelles. Ceci signifie que  $\Pi = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ . Alors les cercles de rayon 1 centrés en  $(0; 0)$  et en  $(1; 0)$  ne se coupent pas !

**Exercice 6**

**Test 2016 : Ecriture décimale et fractions.** (32 points = 8 + 8 + 8 + 8) On demande dans cet exercice de donner tous les calculs qui conduisent au résultat.

- (1) Transforme la fraction  $\frac{49}{280}$  en écriture décimale.
- (2) Transforme la fraction  $\frac{40}{37}$  en écriture décimale. Quelle est la longueur de la période ?
- (3) Quelle fraction irréductible correspond au nombre 0,512 ? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.
- (4) Quelle fraction irréductible correspond au nombre  $0,\overline{123}$  ? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.

**Exercice 7**

**Test 2016 : Théorie : les nombres rationnels.** (28 points = 5 + 8 + 7 + 8)

- (1) Définis la somme de deux nombres rationnels représentés par des fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ .
- (2) Démontre que la somme dans  $\mathbb{Q}$  est commutative, i.e. si  $r, s \in \mathbb{Q}$ , alors  $r + s = s + r$ . Indique si (et où) tu utilises la commutativité de la somme dans  $\mathbb{Z}$  et la commutativité du produit dans  $\mathbb{Z}$ .
- (3) Soit  $m$  un nombre entier non nul. Calcule  $\left(\frac{7}{m} + \frac{m}{7}\right)^{-1}$  en fonction de  $m$ .
- (4) Détermine l'ensemble de tous les nombres rationnels  $r$  qui vérifient  $\frac{1}{r} \leq \frac{2}{5}$ . Trouve d'abord le nombre rationnel  $r$  qui vérifie  $\frac{1}{r} = \frac{2}{5}$  puis résous l'inéquation en tenant compte du signe de  $r$  (positif ou négatif). Vérifie ton résultat pour t'assurer de la justesse de ta réponse !

**Exercice 8**

**Test 2016 : On calcule dans  $\mathbb{Q}$ .** (20 points = 12 + 8) Effectue les calculs suivants en indiquant les étapes intermédiaires et donne la réponse sous forme de fraction irréductible :

(i)  $\frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{44}{99} \cdot \left( -\frac{25}{35} \right) - \frac{13}{14} \cdot \frac{10}{39} \right) : \frac{7}{15} \right] =$

(ii) Lequel de ces deux nombres est le plus grand,  $8,\bar{3}$  ou  $\frac{331}{40}$  ? Explique ton raisonnement !

**Exercice 9**

**Test 2016 : Deux petits problèmes.** (24 points = 12 + 12) A. Lors des élections américaines seulement 54% des électeurs ont effectivement voté et parmi ceux-ci 47% ont voté pour Donald Trump. Quel pourcentage des électeurs a voté pour Trump ?

B. Pour installer un home cinéma à la Maison Blanche, Donald Trump souhaite repeindre un grand mur de 2.5 mètres de haut et de 7 mètres de large avec une peinture blanche spéciale. Il lit sur le pot qu'on peut couvrir  $6m^2$  avec un kilo de peinture. Combien de peinture lui faudra-t-il pour réaliser son rêve ? Donne la réponse exacte (sous forme de fraction d'abord, puis en notation décimale).