Cours Euler: Série 22

le 6 mars 2019

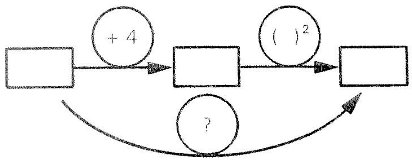
Exercice 1

Composition de fonctions I. Considère les paires ou triplets de fonctions suivantes. Commence par trouver des ensembles maximaux pouvant remplir les rectangles de sorte que les fonctions soient définies, puis détermine la fonction composée.
Par exemple, on a la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x+3$ et la fonction $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sqrt{x}$. La composition de ces deux fonctions semble être $\sqrt{x+3}$, mais cette formule a un sens à condition que $x+3 \geq 0$. Donc pour pouvoir composer ces deux fonctions je dois restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de f et considérer

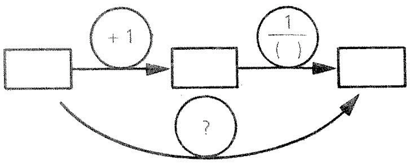
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

La fonction composée est alors bien $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+3}$.

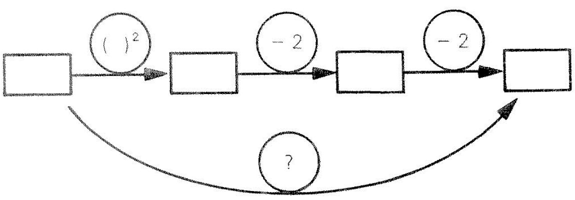
1)



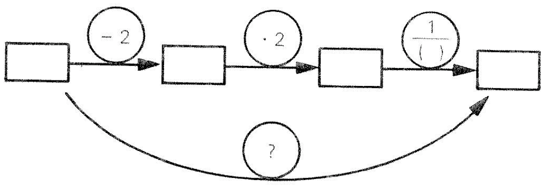
2)



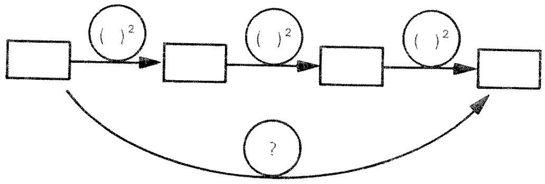
3)



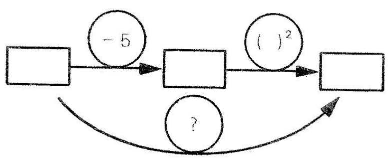
4)



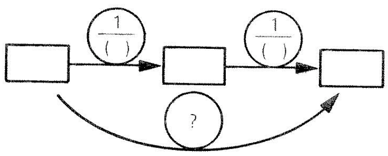
5)



6)



7)



Exercice 2

Composition de fonctions II. Trouve deux fonctions $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ telles que $(g \circ f)(x)$ s'écrive comme suit (ni f, ni g ne doivent être l'identité). Pour ton choix de fonctions f et g, détermine $A, B, C \subset \mathbb{R}$ maximaux tels que $g \circ f$ est définie. Si par exemple on doit obtenir la fonction $\dfrac{1}{x^2-2}$, alors on peut poser $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour que $g(x)$ soit bien défini il faut que x soit non nul, si bien que pour composer f et g nous devons avoir $x^2 - 2 \neq 0$. Finalement les choix à faire sont les suivants

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & x^2 - 2 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1}{y} \end{array}$$

(a) $(x+2)^2$

(b) $\dfrac{1}{x^2}$

(c) $x^2 + 2$

(d) $\dfrac{1}{x^2+2}$

(e) $\dfrac{1}{(x+2)^2}$

Exercice 3

Composition de fonctions III.

(a) Calcule la composition $g \circ f$ des fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+5 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 \end{array}$$

Est-elle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ou faut-il restreindre à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$?

(b) Même question avec les fonctions x^2 et $y + 5$.

(c) Même question avec les fonctions $x + 1$ et $\dfrac{1}{y}$.

(d) Même question avec les fonctions $x - 1$ et $y^2 - 2y + 1$.

(e) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+2 \end{array}$$

Calcule $f[g(1)]$, $g[f(1)]$, $f[g(-2)]$, $f[g(-3)]$, $(g \circ f)(0)$, $(g \circ f)(0{,}5)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(8)$.

Exercice 4

Fonctions affines et linéaires. Dessine les graphes des fonctions suivantes. Lesquelles sont affines ? Lesquelles sont linéaires ? Détermine ensuite quels points parmi $A = (0;3)$, $B = (0;0)$, $C = (4;3)$, $D = (4;-2)$, $E = (-3;11)$ appartiennent au graphe de l'une ou l'autre des ces fonctions.

1. $a\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x \end{array}$

2. $b\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x+2 \end{array}$

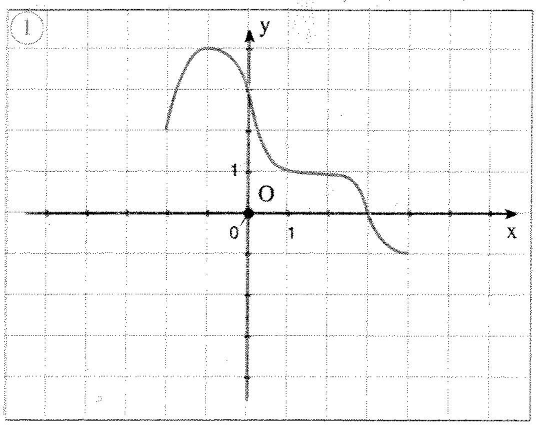
3. $c\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \end{array}$

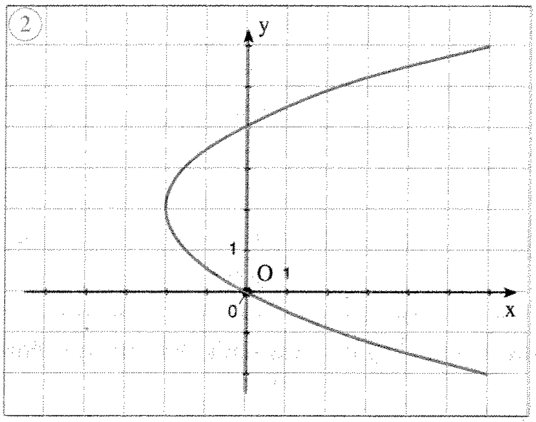
4. $d\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{4}x \end{array}$

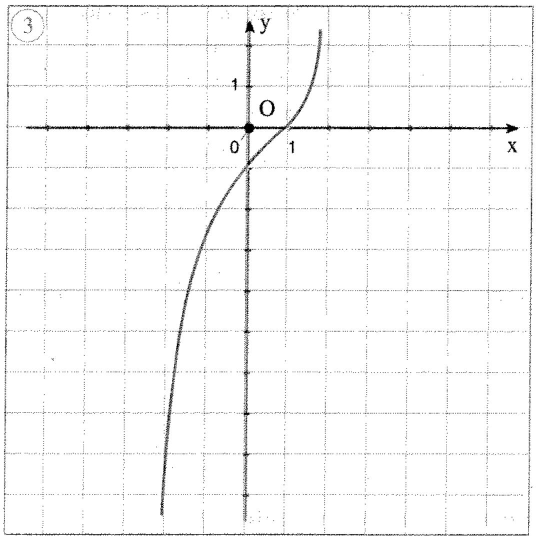
Exercice 5

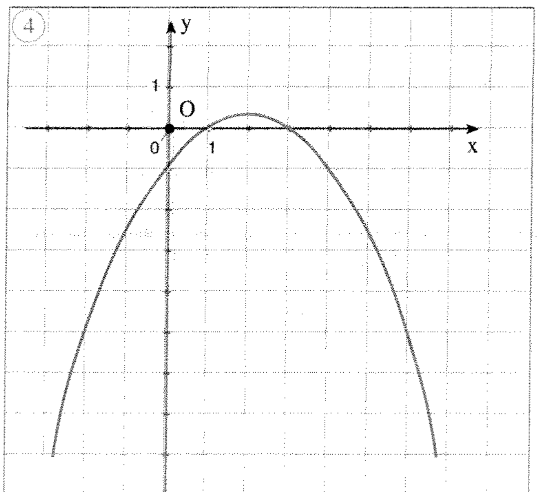
Graphe de fonction II.

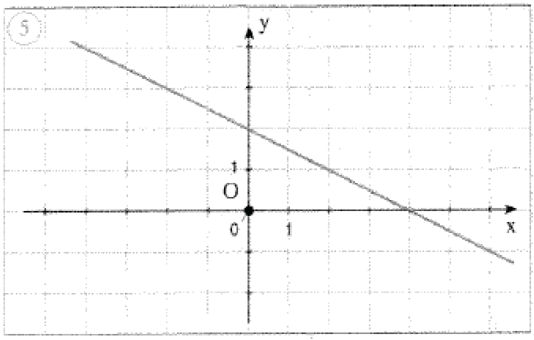
a. Voici des représentations graphiques de “relations”. Lesquelles ne sont pas des fonctions ? Pourquoi ?

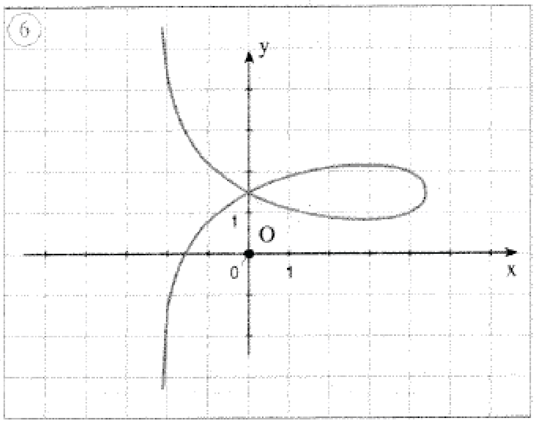












b. Lorsqu'il s'agit d'une fonction, détermine chaque fois

1) l'image de -2;
2) les coordonnées du point d'intersection du graphique avec l'axe des ordonnées;
3) l'abscisse du (ou des) points dont -1 est l'image;
4) la (ou les) racine(s) de la fonction.

c. Voici des équations de graphiques de relations (dans $\mathbb{R}$) :

1) $y = \dfrac{3x-2}{2}$ 3) $y^2 = x$ 5) $2x + y = 3$

2) $y = \sqrt{-x}$ 4) $xy = 3$ 6) $x^2 + 2y = 0$

– ~~Établis pour chaque relation un tableau de valeurs.~~

2,4 et 6

– Représente graphiquement les relations dans un plan cartésien.

– Ces relations sont-elles des fonctions ? Justifie !

Exercice 6

L'équation d'une parabole. On considère la droite horizontale h d'équation $y = 2$ et le point F de coordonnées $(2; 1)$. On cherche à décrire la parabole qui est constituée des points équidistants de h et de F. Autrement dit on cherche le *lieu géométrique* des points P de coordonnées $(x; y)$ tels que $d(P; h) = d(P; F)$. Trouve la fonction quadratique dont le graphe est cette parabole.

Indication. Simplifie-toi la vie en étudiant l'équation $d(P; h)^2 = d(P; F)^2$ et exprime l'ordonnée y en fonction de l'abscisse x.

Exercice 7

Un exercice proposé par les Olympiades suisses de mathématiques (2015). Soient a, b et c des nombres naturels tels que a divise b^2, b divise c^2 et c divise a^2. Montrer que abc divise $a^7 + b^7 + c^7$.

Si tu aimes ce genre de problèmes, tu en trouveras tous les mois sur www.imosuisse.ch !

Exercice 8

FA48 Que d'accidents !

Voici un tableau indiquant le nombre d'accidents de la route ayant fait des victimes, de 1999 à 2009, dans les cantons de Vaud, du Valais et de Genève.

Années	Nombres d'accidents avec victimes
1999	4510
2000	4779
2001	4656
2002	4712
2003	4530
2004	4390
2005	3958
2006	3939
2007	4124
2008	3872
2009	3775

a) A l'aide d'un tableur, réalise un diagramme cartésien montrant l'évolution du nombre d'accidents ayant causé des victimes, de 1999 à 2009.

b) Que peux-tu dire de l'évolution du nombre d'accidents ?

Exercice 9

1. Détermine la fonction affine dont le graphe passe par $(0; 3)$ et dont la pente vaut -2.
2. Détermine la fonction affine dont le graphe passe par $(2; 3)$ et $(-2; 1)$.
3. Détermine t si le point $(1; 4)$ appartient au graphe de la droite d'équation $y = 3x + t$.
4. Détermine k si la droite d'équation $y = kx + 3$ est parallèle à l'axe des x.
5. Détermine a si la droite d'équation $y = ax - t$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x + 1$.
6. Détermine le nombre s si $B = (5; \frac{s}{2})$ est un point de la droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$.

Exercice 10

Justifie !

380. Associe une équation à une droite dessinée :

1) $y = \dfrac{4-3x}{2}$ 3) $y = \frac{1}{3}x + 1$ 5) $y = 3x$

2) $y = -x + 2$ 4) $y = x$ 6) $y - 1 = 0$.