Cours Euler: Série 20

le 13 février 2019

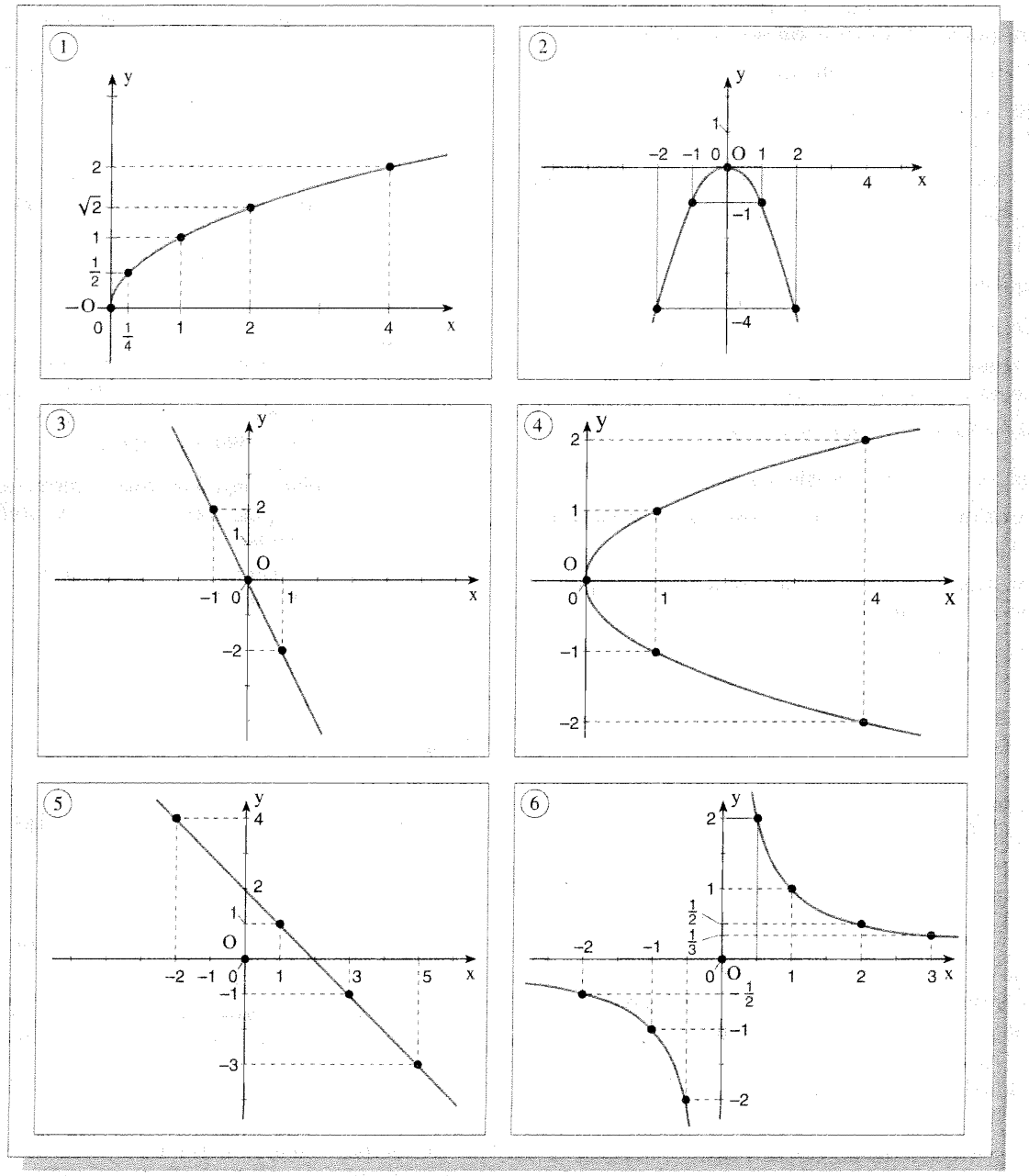
Exercice 1

Graphe de fonction I. Sur la donnée.

Observe les graphiques dessinés ci-après.

a Tente d'associer à chacun d'eux une des formules suivantes :

Ⓐ $y = -2x$; Ⓑ $y^2 = x$; Ⓒ $y = \frac{1}{x}$; Ⓓ $y = -x^2$; Ⓔ $y = \sqrt{x}$; Ⓕ $y = -x + 2$.



Quel graphe n'est pas celui d'une fonction ? Pourquoi ?

Exercice 2

FA9 La goutte qui fait déborder le vase

On verse de l'eau dans un vase à fleurs. Pour chaque quantité d'eau versée, on mesure la hauteur qu'elle atteint dans le vase. Les résultats sont inscrits dans ce tableau :

Volume d'eau en cl	40	80	120	160	200	240	280
Hauteur d'eau en mm	27	54	81	108	158	208	258

a) Etablis un graphique de la situation.

b) Trouve la hauteur d'eau correspondant à un volume de 50 cl, de 130 cl, de 260 cl.

c) Propose un croquis de ce vase.

Exercice 3

Injection et surjection. Pour chacune des associations suivantes, détermine, *en justifiant*, s'il s'agit d'une fonction et si c'est le cas, si elle est injective et/ou surjective.

1. « traverse » : {Rivières d'Europe} $\to$ {Villes d'Europe}.
2. $\mathrm{Id}_X \colon X \to X$
3. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$ et $f \colon X \to Y$ associe à tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ le plus petit élément de l'ensemble A.
4. X est l'ensemble des suites de sept chiffres (p. ex. 0098704 en est une), Y est l'ensemble des téléphones du canton Vaud et $f \colon X \to Y$ est définie par $f(x)$ sonne si je compose le $021/x$ sur mon portable.
5. X est l'ensemble des voitures, Y est l'ensemble des habitants de cette planète et $f \colon X \to Y$ est définie par x était conduite par $f(x)$ hier à 13h30.
6. $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est définie par $f(x)$ est le carré de x.
7. $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est définie par x est le carré de $f(x)$.
8. $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est définie par x est le carré de $f(x)$.
9. $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par x est le carré de $f(x)$.
10. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par x est le cube de $f(x)$.

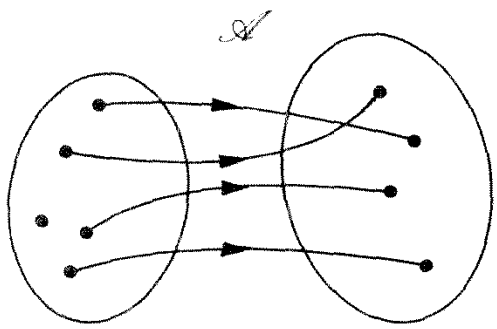
Exercice 4

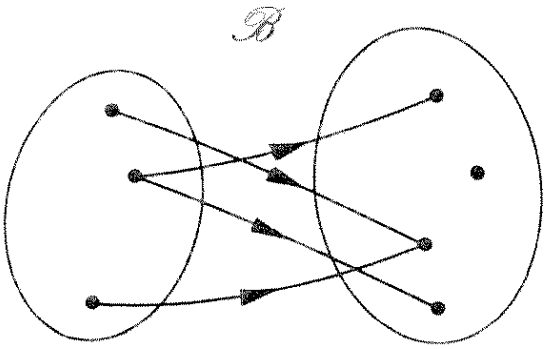
Représentation schématique d'une fonction. Pour 2.2.3, lorsque ce n'est pas une fonction, indique quelle partie de la définition n'est pas vérifiée.

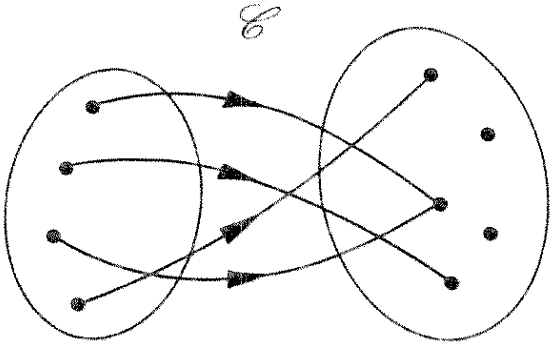
2.2.3.

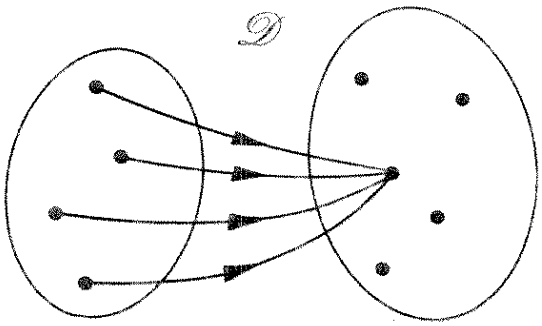
Voici des schémas représentant des correspondances. Reconnaître lesquelles de celles-ci sont des fonctions. (Tous les éléments des ensembles et toutes les flèches sont notés.)

1)

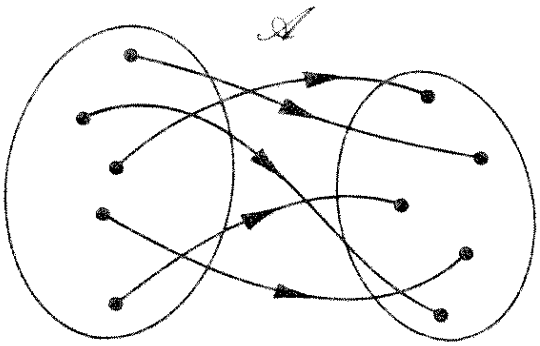


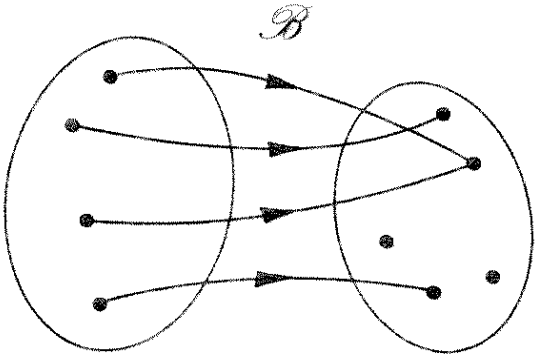


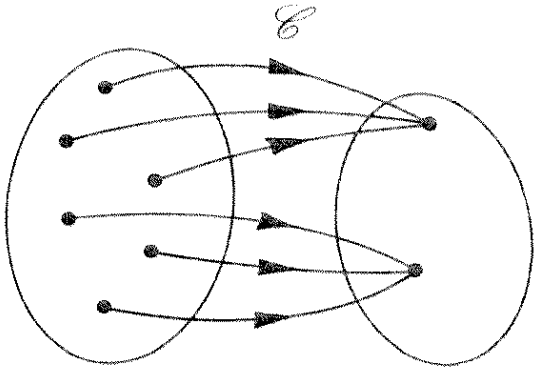


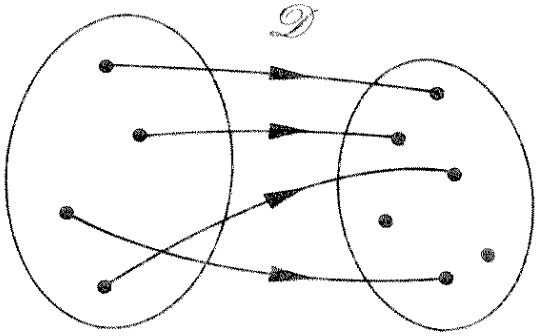


2)



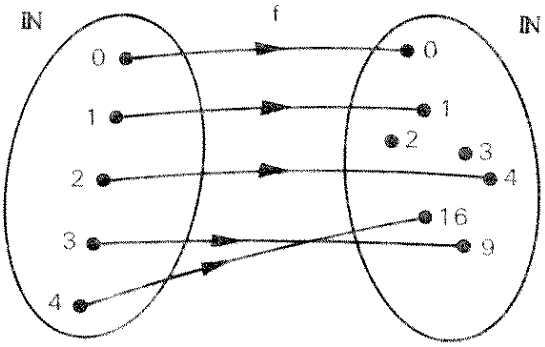






2.2.4.

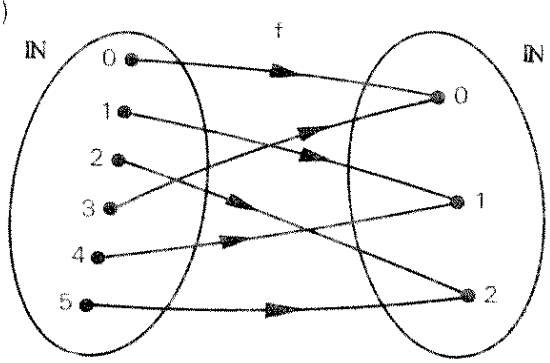
1) Dans le diagramme suivant on a dessiné quelques éléments de $\mathbb{N}$ et quelques-unes des flèches représentant une fonction f.



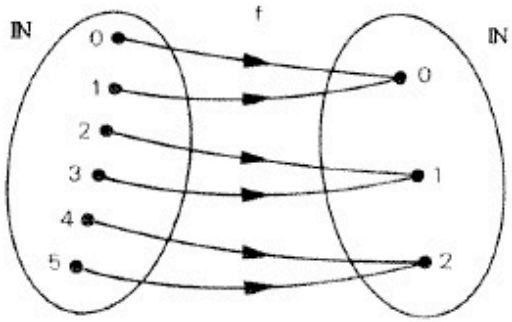
Quelle est l'image par f de 1 ? de 3 ? de 4 ?

Mêmes questions, si f est représentée par

2)



3)



2.2.5.

1) Soit l'ensemble A,

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

et la fonction f donnée par

$$\begin{array}{lll} f : & A & \longrightarrow A \\ & a & \longmapsto c \\ & b & \longmapsto b \\ & c & \longmapsto a \\ & d & \longmapsto e \\ & e & \longmapsto c\,. \end{array}$$

Quel est f(a) ? f(c) ? f(d) ?

Mêmes questions si f est la fonction

$$\begin{array}{lll} 2)\ f : & A & \longrightarrow A \\ & a & \longmapsto b \\ & b & \longmapsto a \\ & c & \longmapsto e \\ & d & \longmapsto d \\ & e & \longmapsto c \end{array}$$

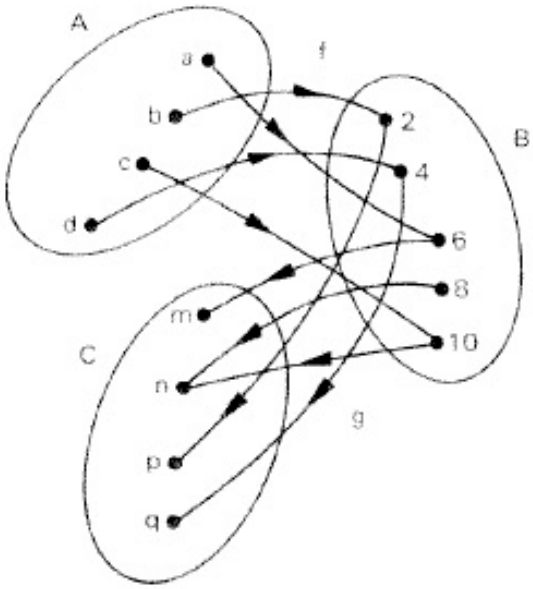
$$\begin{array}{lll} 3)\ f : & A & \longrightarrow \mathbb{N} \\ & a & \longmapsto 1 \\ & b & \longmapsto 2 \\ & c & \longmapsto 3 \\ & d & \longmapsto 4 \\ & e & \longmapsto 5 \end{array}$$

2.2.6.

Soit les ensembles A, B et C

$$A = \{a, b, c, d\},$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$
$$C = \{m, n, p, q\},$$

et les fonctions f, de A dans B, et g, de B dans C, données par le diagramme suivant.



Quel est

1) f(a) ? f(c) ? g(2) ? g(10) ?
2) f(b) ? g(6) ? f(d) ? g(4) ? g(8) ?
3) g(f(d)) ?
4) g(f(a)) ? g(f(b)) ? g(f(c)) ?

Exercice 5

2.2.7. Dans $\mathbb{N}^*$ cherche l'image par la fonction f des nombres 1, 8, 16, 35 et 100 lorsque f est la fonction qui associe à tout nombre entier

1. le nombre qui le suit dans la suite croissante des nombres entiers,
2. son triple,
3. son double diminuée de 1,
4. le plus grand carré parfait (carré d'un nombre entier) qui lui est inférieur ou égal,
5. son ppmc avec 20,
6. le nombre de ses chiffres (écrit en base 10),
7. le plus petit multiple de 7 qui lui est supérieur.

Donne tes réponses (sans justification) dans un tableau à double entrée avec 5 lignes pour les 5 nombres proposés et 7 colonnes pour les 7 fonctions données.

2.2.8 Même problème pour $f(1), f(8), f(20), f(63)$ et $f(100)$ pour la fonction f qui associe à tout nombre naturel

1. son carré,
2. le reste de la division par 7,
3. son triple augmenté de 5,
4. le nombre de ses diviseurs,
5. son pgdc avec 60,
6. le plus petit nombre premier qui lui est supérieur,
7. le nombre de ses multiples inférieurs (strictement) à 100,
8. le nombre des nombres premiers qui lui sont inférieurs (strictement).

Exercice 6

2.2.9

1. Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{g, h\}$ deux ensembles. Trouver toutes les fonctions de E dans F (en donnant pour chacune d'elles l'image de *chaque* élément de l'ensemble de départ).
2. Même exercice pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{g, h, j\}$.
3. Même exercice pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{g, h\}$.
4. Combien existe-t-il de fonctions de E dans F lorsque $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $F = \{g, h\}$? Il n'est pas nécessaire de donner la liste de toutes les fonctions, un argument de comptage (combinatoire) suffit !
5. Même exercice pour $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{g, h, j, k\}$.
6. Même exercice pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{g, h, j, k, l, m\}$.

Exercice 7

Un peu de théorie.
(a) On travaille avec les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Les sous-ensembles suivants du produit cartésien $A \times B$ sont-ils le graphe d'une fonction $f\colon A \to B$? Sinon, pourquoi ?

1. $G_f = \{(a, 2); (c, 5); (b, 2); (d, 9)\}$
2. $G_f = \{(b, 6); (d, 5); (a, 1); (b, 9)\}$
3. $G_f = \{(b, 6); (d, 5); (a, 1); (b, 9); (c, 6)\}$

(b) Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, lesquelles sont des bijections ? Explique !

1. $f(a) = a + 4$
2. $f(a) = 4a$
3. $f(a) = a^2$
4. $f(a) = -a$
5. $f(a)$ est le reste de la division par 10
6. $f(a) = a^3$
7. $f(a) =\mid a \mid$

Exercice 8

Un problème géométrique. On considère un rectangle de base x et de hauteur y dont l'aire vaut 10cm^2. On fait varier x et on se demande alors comment varie y sachant que l'aire reste inchangée.

1. Dresse un tableau de correspondance entre x et y lorsque x prend les valeurs $0,5$ cm, 1 cm, 3 cm, 5 cm, 10 cm.
2. Trouve une formule qui exprime y en fonction de x. Ceci détermine une fonction (pour quelles valeurs de x cela a-t-il un sens géométrique ?
3. Reporte les points trouvées en (1) dans un système d'axes (sur du papier quadrillé) et complète cette représentation en esquissant proprement et soigneusement le graphe de la fonction (qui traduit la variation de la hauteur en fonction de la base).

Exercice 9

Déterminer si la fonction est injective, surjective ou bijective.

1. $f\colon \{\text{élèves du cours Euler }\} \longrightarrow \mathbb{N}$
   $x \longmapsto f(x) =$ âge de l'élève x
2. $g\colon \{\text{villes}\} \longrightarrow \{\text{pays}\}$
   $x \longmapsto g(x) =$ pays auquel la ville x appartient
3. $h\colon \{\text{capitales}\} \longrightarrow \{\text{pays}\}$
   $x \longmapsto h(x) =$ pays dont la ville x est la capitale
4. $i\colon \{\text{élèves du cours Euler}\} \longrightarrow \{13, 14, 15\}$
   $x \longmapsto i(x) =$ âge de l'élève x
5. $ASCII\colon \{\text{256 caractères}\} \longrightarrow \{\text{nombres binaires à 8 chiffres}\}$
   $x \longmapsto ASCII(x) =$ code binaire à 8 chiffres du caractère x
6. $T\colon \{\text{minutes d'un jour}\} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longmapsto T(x) =$ température à la minute x
7. $j\colon \{\text{élèves possédant un natel}\} \longrightarrow \{\text{numéros à 10 chiffres}\}$
   $x \longmapsto j(x) =$ numéro de natel de l'élève x
8. $k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longmapsto k(x) = 2 \cdot x$

Exercice 10

Quelques fonctions. Dessine le graphe de chacune des fonctions suivantes. Détermine pour commencer l'ensemble de définition de chaque fonction Fais bien attention au signe de $f(x)$ (quand la fonction prend-elle des valeurs positives ?). Tu peux t'aider d'une machine à calculer ou d'un ordinateur, de manière intelligente en vérifiant si la machine donne une réponse compatible avec l'ensemble de définition !

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x}$
3. $h(x) = \dfrac{12}{x}$
4. $k(x) = \sqrt{16 - x^2}$
5. $l(x) = \dfrac{2x+3}{3x-6}$