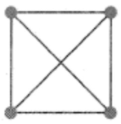
Cours Euler: Mini-Série 21

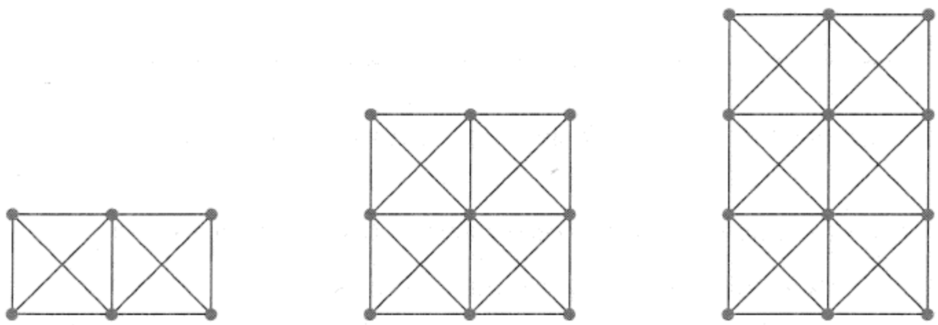
le 20 février 2019

Exercice 1

Un élément de ce motif est constitué d'un carré et de ses diagonales.



On les empile ainsi :



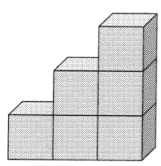
1re étape 2e étape 3e étape

Combien comptera-t-on d'éléments de motif à la 10e étape ? A la 25e ? Et à la 2011e ?

Et de diagonales ? Et de points verts ?

Explique ta démarche.

On considère ensuite un escalier construit avec des cubes identiques. Celui-ci est haut de trois marches



Combien faut-il de cubes pour construire un escalier de 1500 marches de hauteur ?

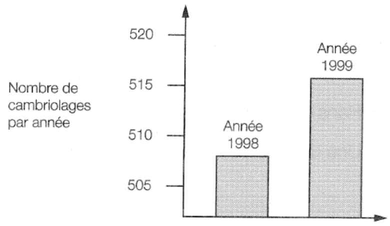
Exercice 2

FA51 Cambriolages

Lors d'une émission télévisée, un journaliste montre ce graphique et dit :

« Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »

Considères-tu que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifie ta réponse.



Exercice 3

Les nombres réels. (21 points) On lit dans le journal Le Monde du 15 février : Cérès est une planète naine, orbitant dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter, à environ 360 millions de kilomètres du Soleil. Son diamètre est de 950 kilomètres, et elle représente le tiers de la masse de la ceinture d'astéroïdes. Dans le journal Science du 17 février, des chercheurs italiens et américains de la NASA et de l'Institut d'astrophysique et de planétologie spatiale de Rome (IAPF) expliquent y avoir détecté, pour la première fois, la présence de molécules organiques.

(1) (16 points) Sachant que la vitesse de la lumière vaut 300'000'000 m/s (mètres par seconde), calcule le temps qu'il faut, en minutes, pour qu'un rayon de Soleil parvienne sur Cérès.

(2) (5 points) L'orbite de Cérès autour du Soleil n'est pas circulaire et sa distance maximale au Soleil est $414'103'605,89742368584$ km. Approxime ce nombre au centième.

Exercice 4

Egalité de polynômes. (12 points) On travaille dans $\mathbb{R}[x]$. Calcule toutes les valeurs possibles des nombres réels a et b pour que les polynômes $p = x^2 + (3-a)x - 7$ et $q = (x-b)(x+b)$ soient égaux.

Exercice 5

Réduction de monômes et de polynômes. (21 points)

(1) (6 points) Dans $\mathbb{R}[x,y]$ quels sont les degré et coefficient du monôme $-3xyx(\sqrt{3}\,x^2y^3)(-\sqrt{5}\,x)$?

(2) (5 points) Dans $\mathbb{Z}[x,y,z]$ écris le polynôme $(2x+3y)(3x-2y)$ sous forme réduite.

(3) (10 points) Dans $\mathbb{R}[x]$ écris le polynôme $(x+3)(x+3)(1-x)(x-2)$ sous forme ordonnée et réduite.

Exercice 6

Un peu de théorie. (28 points)

(1) (5 points) Donne la définition de $x^{-\frac{11}{4}}$ en termes de puissances et de racines. Pour quelles valeurs de x cette expression a-t-elle un sens ?

(2) (8 points) Démontre que $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ pour tous les nombres réels x et y en te basant sur des propriétés des puissances entières.

(3) (15 points) Démontre que $\sqrt{7}$ n'est pas un nombre rationnel. Il n'est pas nécessaire de démontrer les propriétés de divisibilité utilisées.

Exercice 7

Vrai ou Faux (20 points) Justifie brièvement chaque réponse.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt[4]{x^4} = \mid x \mid$.

(2) On a $\sqrt{13} > 3{,}5$.

(3) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x^2 + 6x + 9$.

(4) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x + 100$.

Et encore quelques exercices pour s'entraîner.

Exercice 8

On travaille dans l'algèbre $\mathbb{Q}[x, y]$. Réduis les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables. Puis ordonne par rapport à l'indéterminée x et indique le degré.

1. $(x + y)^2$
2. $(2x - 5)^2$
3. $(3 - x) \cdot (3 + x)$
4. $(x + 1)^3$
5. $(2x - 3y)^2$
6. $4x \cdot (x + 2)^2$

Exercice 9

On travaille dans l'algèbre $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Réduis les expressions suivantes en utilisant la distributivité et les identités remarquables, lorsqu'elles s'appliquent. Puis ordonne dans l'ordre croissant et indique le degré du polynôme.

1. $(x + 2) \cdot (x + 5)$
2. $(x + y) \cdot (x - y)$
3. $2x \cdot (y - 3) \cdot (y + 2)$
4. $-5 \cdot (x^2 + x + 2)$
5. $(2x + 1) \cdot (x + 5) \cdot (-x - 2)$
6. $(x + y) \cdot (x + y + z)$
7. $(x^2 + y^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$
8. $-5x \cdot (x - 2)^2 \cdot x^2$
9. $(x + y + z)^2$
10. $(x + y - z)^2$

Exercice 10

On travaille dans l'algèbre de polynôme $\mathbb{R}[x, y, z]$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Réduis, ordonne et indique le degré.

1. $(x^2 + 2x - 5) - (3x - 6 + 3x^2)$
2. $(y - 5 + y^2) - (8 + y^2 + y)$
3. $-(z^2 + (3z)^2 - 2.4z + b + \pi z)$
4. $z^3 - (z^4 - (ya)^2 + 3 \cdot (z + y^2))$
5. $y + 2xy - \frac{4}{7}(5x - \frac{3}{27}) - (x + 2.\bar{5})$

Exercice 11

Egalité de polynômes. On travaille dans $\mathbb{Q}[x]$. Calcule la valeur des nombres rationnels a, b, c, s'ils existent, tels que

$$(x - 1)(x + a)(x + 1) = x^3 + 2x^2 + bx + c$$

Exercice 12

Réduction de monômes et de polynômes. On travaille dans $\mathbb{R}[x, y, z]$. Ecris le polynôme suivant sous forme réduite, indique son degré et la partie littérale de chaque terme.

$$(x + y^2z)xyz(2x - 2zx) + 2(x^2y^3z^3 - x^2yz)$$

Exercice 13

Simplification. Ecris le nombre réel $\dfrac{5}{\sqrt[7]{125}\sqrt[7]{5}}$ en faisant disparaître les racines du dénominateur