Cours Euler: Série 19

le 5 février 2019

Exercice 1

Utilise les propriétés des puissances pour simplifier au maximum les expressions suivantes. On rappelle que la notation $\mathbb{R}_0$ signifie $\mathbb{R}^*$ avec nos conventions.

131. Calcule ($a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$) :

1re série

1) $2a^2 \,.\, 3a^4$

2) $(-3b^2)(-2b^3)$

3) $4a^2(-2b^2)$

4) $3a^3b^2(-5a^5b^4)$

5) $(2a^2)^3$

6) $(-3b^4)^2$

7) $(-5a^2b^3)^3$

8) $-(-2a^2b)^2$

9) $\left(\frac{1}{2a^2}\right)^3$

10) $\left(\frac{-3b^3}{4}\right)^2$

11) $\left(\frac{-a^2}{b^5}\right)^3$

12) $-\left(-\frac{a}{b^4}\right)^2$

2e série

1) $(-2a^2 \,.\, a^3)^2$

2) $(-3a^2b \,.\, ab^2)^3$

3) $(-4a^2b)^2(2ab)^3$

4) $(-4a^3b^3)^2 + (2a^2b^2)^3$

5) $\left(\frac{2a^3}{3a}\right)^2$

6) $\left(-\frac{3}{5}a^3\right)\left(\frac{25}{9}a^2\right)$

7) $(0{,}2\,a^2)(0{,}1\,a^3)^2$

8) $2a^5 - (-3a^2)^3$

9) $-\left(\frac{-2a^3b}{3ab^3}\right)^2$

10) $9a\left(\frac{4b}{6a}\right)^3$

Exercice 2

Pour 20. et 21., utilise les *propriétés des puissances rationnelles* pour simplifier les expressions.

20. Écris sous la forme d'une puissance de a ($a \in \mathbb{R}_0^+$) les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant négatif, ni fractionnaire :

1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$

2) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

3) $a^{-\frac{1}{2}}a^2$

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

5) $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$

6) $\left(\dfrac{2}{a^{\frac{-1}{2}}}\right)^3$

7) $a^{1,25}a^{1,50}$

8) $\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}$

21. ★

Utilise les exposants fractionnaires pour simplifier les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant négatif, ni fractionnaire ($a \in \mathbb{R}_0^+$) :

1) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}$

2) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a}$

3) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\ \sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$

5) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}}$

6) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^{-1}}}{a\sqrt{a^{-2}}}\right)^3$

7) $\dfrac{27a^{-2}\sqrt{a^4}}{64\sqrt{a\sqrt{a}}}$

Exercice 3

23. Vrai ou **faux** ? Justifie.

1) $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = a+b$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

2) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}) = a-b$ si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

3) $\sqrt[n]{x^{3n}} = x^3$ si $x \in \mathbb{R}^+$

4) $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{1}{2}}$

5) $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{-2}$

6) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

Exercice 4

Traduction. Traduis les phrases suivantes par une expression littérale.

(a) Je choisis un nombre a, je le multiplie par 4, puis j'ajoute 5 au résultat.

(b) Je choisis un nombre b, je lui ajoute 5, puis je multiplie par 4 le résultat.

(c) Je choisis un nombre c, je lui ajoute le produit de 4 par 5.

(d) Je choisis un nombre d, je lui enlève 5, puis je multiplie par 4 le résultat.

(e) Je choisis un nombre e, je le multiplie par 5, puis j'enlève 4 au résultat.

(f) Je choisis un nombre f, je le multiplie par 4, puis j'ajoute 4 au résultat.

(g) Je choisis un nombre g, je l'élève au carré, puis j'ajoute 7 au résultat.

(h) Je choisis un nombre h, je lui ajoute 7, puis j'élève au carré le résultat.

(i) Je choisis un nombre naturel n et je lui ajoute les deux nombres naturels consécutifs.

Exercice 5

Monômes. Dans cet exercice toutes les lettres (x, y, z, m, a, b, u) sont des indéterminées !

a. Trouve le coefficient, la partie littérale et le degré des monômes suivants :

$$-5x \qquad 2z^3 \qquad \frac{9}{2}y^8 \qquad -0{,}02 \qquad m^4 \qquad 3x^2yz \qquad \frac{ab}{2}$$

b. Dans la liste suivante quels sont les monômes semblables ?

$$5x \qquad 5y \qquad \frac{9}{2}y^3 \qquad xy \qquad \frac{x}{2} \qquad (xy)^2 \qquad \sqrt{2}y^3$$

c. Pour réduire une expression littérale comme $6b \cdot 3b$, il faut comprendre que la juxtaposition représente un produit, puis utiliser les propriétés de commutativité de la multiplication :

$$6b \cdot 3b = 6 \cdot b \cdot 3 \cdot b = 6 \cdot 3 \cdot b \cdot b = 18 \cdot b^2 = 18b^2$$

Fais de même dans les cas suivants :

1. $4a \cdot 3$
2. $12x \cdot 2x$
3. $z \cdot u$
4. $4z \cdot 1{,}5 \cdot 2z$
5. $-10x \cdot (-10x) \cdot (-10)$
6. $y \cdot y \cdot 4z$

d. Voici quatre monômes $A = 3x^2$, $B = -\dfrac{x}{3}$, $C = 12$ et $D = 12x^3$. Calcule les expressions

1. AB
2. $A + B$
3. $D - 4A$
4. $AC + B^2$
5. $(A + B)(A - B)$
6. $CD - AB$

Exercice 6

Un peu de théorie.

(a) Parmi les expressions suivantes, lesquels sont des polynômes ?

$$\pi x^2, \quad \frac{4}{x}, \quad x^3 + x^2 + x + 1, \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \quad 2^x + 2, \quad \sqrt[4]{x}$$

(b) Soit $K[x_1, \surd, x_n]$ une algèbre de polynôme. Nous avons démontré que le polynôme x n'admet pas d'inverse. Inspire-toi de cette démonstration pour montrer que si f est un polynôme inversible, alors f doit être un nombre (un polynôme de degré zéro).

(c) Considérons l'algèbre de polynôme $\mathbb{R}[x]$. Soient a, b, c des nombres réels (et non des indéterminées !). Considérons $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ les polynômes suivants :

$$f = ax^2 + bx + c, \quad g = 5x + 2, \quad h = 9x^2 - 5$$

Pour quels nombres réels a, b, c est-ce que :

a) $f = g$?

b) $f = g + h$?

c) $f = g^2$?

d) $bx + c = h$?

(d) Considérons maintenant l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[x,y]$. Soient $f,g,h \in \mathbb{Q}[x,y]$ les polynômes suivants, où a,b,c,d,r,s sont des nombres rationnels :

$$f = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry + s,\ \ g = 9xy - 6x^2 + 5,\ \ h = -7x - 5y$$

Pour quels nombres réels a,b,c,d,r,s est-ce que :

a) $f = g$?

b) $f = g + h$?

c) $f = h^2$?

d) $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry = g$?

Exercice 7

Réduction de polynômes. Réduis les expressions suivantes :

(1) $a(ab)$

(2) $2xy(3xy)$

(3) $-2v \cdot 5v$

(4) $6m \cdot 6mn$

(5) $\frac{c}{2} \cdot 20c$

(6) $-y \cdot y \cdot (-y)$

(7) $(-r)(-t)(-4)$

(8) $(6c)^2$

(9) $(2a^2)^3$

(10) $(4 \cdot 4)(5 \cdot 5)$

(11) $x + 8z$

(12) $4m + 3m - 2m$

(13) $8y - 8y$

(14) $1{,}5z + 3z + 4{,}5z$

(15) $3x + 4 + x - 5$

Exercice 8

On travaille avec l'algèbre de polynômes $\mathbb{R}[x,y]$ et $a,b \in \mathbb{R}$ (attention : dans cet exercice a et b sont des nombres réels et non des indéterminées). Réduis les expressions suivantes et indique leur degré. Sur la donnée.

(1) $y^3 3^{-4} x^5 3a^5 y^4 y^3 =$

(2) $(a^2b^3)^{-5}(5b^3)^2 =$

(3) $3(x^2y^6)(y^3x)y^5 =$

(4) $\left[(a^{\frac{1}{2}}x^2)(3a^2x)\right]^2 =$

(5) $3a^2(4x)(a^0)^2 =$

Exercice 9

Partie I. Dans les calculs ci-dessous on a réduit les polynômes en plusieurs étapes. Indique au-dessus de chaque égalité quelle propriété des anneaux commutatifs a été utilisée. Sur la donnée.

(a) $x + (5x - 3) = (x + 5x) - 3 = (1 + 5)x - 3 = 6x - 3$

(b) $x \cdot (ax) = x \cdot a \cdot x = a \cdot x \cdot x = ax^2$

(c) $-x - (-x - x) = -x + x + x = (-1 + 1 + 1)x = 1 \cdot x = x$

(d) $25 \cdot 9x \cdot [-2x \cdot (x \cdot 2)] = 25 \cdot 9 \cdot x \cdot (-2) \cdot x \cdot x \cdot 2 = 25 \cdot 9 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = -900x^3$

(e) $(x + 2y - 3) \cdot x - 2x^2 + 3x = x^2 + 2xy - 3x - 2x^2 + 3x = x^2 - 2x^2 - 3x + 3x + 2xy = -x^2 + 2xy$

Partie II. Réduis les polynômes suivants en utilisant dans l'ordre indiqué les propriétés d'associativité (a), de commutativité (c) et de distributivité (d). Sur la donnée.

1. (a, c) : $25 \cdot (-x) \cdot (2yx) \cdot (-3) \cdot [y^2 \cdot (-x)] =$

2. (d, c, d) : $-(2x - 5y + 2) + 5x^2 - 7(x + 2y) =$

Exercice 10

Carrés magiques. On dit qu'un carré est magique si la somme des termes de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales donne la même réponse.

59.

Ces carrés sont-ils magiques pour l'addition ?

x	$3x-2$	$2x+2$
$3x+2$	$2x$	$x-2$
$2x-2$	$x+2$	$3x$

x	12	$2x$
$2x+4$	$x+3$	5
8	$2x-3$	$x+7$

Les carrés suivants sont-ils magiques pour la multiplication ?

x^2	x^3	x^4
x^5	x^3	x
x^2	x^3	x^4

2	$2x^2$	$x+1$
$0{,}5x^2$	$2x$	4
$4x$	1	x^2

Exercice 11

Partie I. On travaille avec l'algèbre $\mathbb{Z}[x,y,a,b]$. Réduis les polynômes suivants. Ordonne et indique le degré. Donne la liste des termes de chaque polynôme.

1. $2x+3y-5x+8-6y$
2. $19-2x^2+3x-20+2x^2-6x+3x^3$
3. $y-x-x^2-y^2+3y-5x+xy$
4. $ab+a^2-2b+3ba+4a^2b-2a^2$

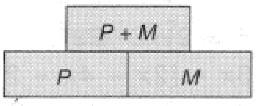
Partie II. On travaille avec l'algèbre $\mathbb{Z}[x,y,z,a,b,c]$. Réduis les polynômes suivants. Ordonne globalement, puis par rapport à chaque indéterminée séparément. Indique le degré.

1. $2y^2+3x-5x-8y+7xy-x^2y+8x\cdot 5y$
2. $(3x)^2-5yx+6x^2-(5x)\cdot(3y)+2y^2x$
3. $2a^2b-(ab)^2-5ab^2+2a^2\cdot 3b^2$
4. $(z^2x)(2x)-(3zx)^2+(6x^2)\cdot z^2$
5. $ab^2c+4cb^2a-(2b)\cdot a\cdot 5c\cdot b+6a^2bc-abc$

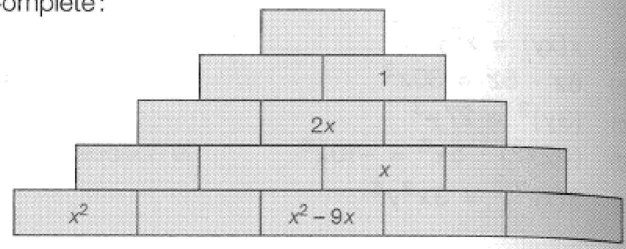
Exercice 12

42. Faire le mur

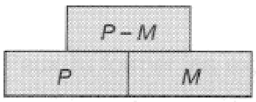
a) On passe d'un étage à l'autre en appliquant la règle suivante :



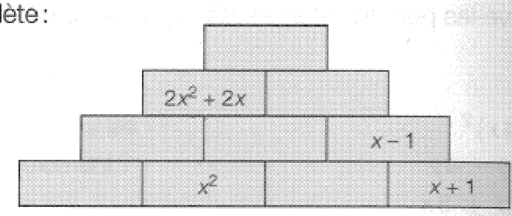
Complète :



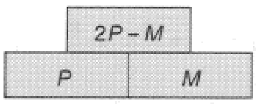
b) Ici, la règle devient :



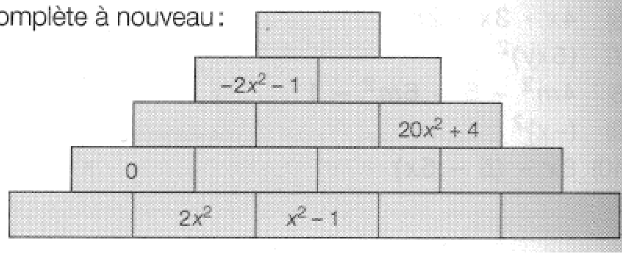
Complète :



c) Et ici :



Complète à nouveau :



Exercice 13

Tiré du programme PROMYS. Pour réfléchir à l'un des 10 problèmes qui est proposé aux gymnasiens de plus de 15 ans pour pouvoir participer à une école d'été de mathématiques !
Si le polynôme $(x+1)^{1000}$ est développé, combien de *coefficients* sont impairs ? Combien ne sont pas divisibles par 3 ? par 5 ? Peut-on généraliser ?

Il y a encore un exercice calculatoire au verso. Il ne sera pas corrigé par les assistants, mais il te sera facile de vérifier si ta réponse est correcte grâce au corrigé.

Exercice 14

La calculatrice est autorisée pour cet exercice. Attention à l'ordre des opérations !

22. Calcule les expressions suivantes, si elles ont un sens (écris les réponses arrondies à 10^{-3} près) :

1^re^ série

1) $\sqrt[3]{7}$
2) $\sqrt[5]{2^3}$
3) $\sqrt[7]{-3^2}$
4) $\sqrt[7]{(-3)^2}$
5) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$
6) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

2^e^ série

1) $\left(2+\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$
2) $3^{\frac{1}{4}}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$
3) $\sqrt{(2+3)^{\frac{1}{3}}}$
4) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}}$

3^e^ série

Si $a=\dfrac{2}{7}$, $b=\sqrt{3}$ et $c=-\dfrac{2}{3}$, utilise les **mémoires** pour calculer :

1) $a+b\sqrt[3]{c}$
2) $(a+b)\sqrt[3]{c}$
3) $(a+b)^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$
4) $\left[(a+b)\cdot c^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$
5) $\sqrt{a+b^{\frac{1}{2}}}$
6) $\left(\sqrt{a+b}\right)^4$
7) $(a+b+c)^{\frac{1}{2}}$
8) $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^{-\frac{2}{3}}$