Cours Euler: Série 18

le 25 janvier 2017

Exercice 1

NO71 Du plus grand au plus petit

Classe, dans l'ordre décroissant, les nombres de chaque ligne.

a)	1^2	0^2	0^1	2^1	2^0	2^2
b)	10^2	2^{10}	$2^2 \cdot 10$	$(10 \cdot 2)^2$	$10^2 \cdot 2^2$	200^2
c)	3355	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	3^5	5^3	$3 \cdot 10^5$	$(5 \cdot 10)^3$
d)	$3^3 \cdot 3^4$	3^{12}	3^7	27^2	9^3	81^2
e)	$10^5 \cdot 10^2$	$10^2 \cdot 10^6$	$10^{(3+5)}$	1000^3	100^4	$1000 \cdot 10000$
f)	$2 \cdot 3^4$	34^2	$2 \cdot 3 \cdot 4$	234^1	$2^3 \cdot 4$	$2^4 \cdot 3$

Exercice 2

NO206 Trouver la lettre

Remplace les lettres par des nombres pour que chaque égalité soit vraie.

a) $3^3 \cdot 3^x = 243$

b) $x^5 = 1$

c) $5^2 \cdot 5^x = 5^2$

d) $10^7 \cdot 10^x = 10^1$

e) $x^2 \cdot x^3 = 32$

f) $a^y = 16$

g) $4^5 : 4^p = 4^2$

h) $b^3 : b^0 = 216$

i) $2^2 \cdot 2^x = 2^3$

j) $4^5 : 4^3 = 4^k$

k) $(2^x)^6 = 64$

l) $(3^2 \cdot 3^1)^x = 3^6$

m) $(-7)^x = -343$

n) $(-5)^5 : (-5)^5 = x$

Exercice 3

1. Démontre qu'un puissance paire (positive ou négative) d'un nombre réel est toujours un nombre positif.
2. Démontre la propriété (4) des fractions de nombres réels, c'est-à-dire que si x, y sont des nombres réels non nuls, alors $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$. (Utilise la définition de l'inverse et les propriétés 2 et 3 des fractions de nombres réels).

3. Démontre que $\frac{1}{x^a} = (\frac{1}{x})^a$. (Montre que $(\frac{1}{x})^a$ est bien l'inverse de x^a en utilisant la définition de l'inverse et la propriété 1 des puissances entières.)
4. Démontre que $(x^a)^b = (x^b)^a$ pour tout nombre réel x non nul et tous entiers relatifs a, b.
5. (Plus difficile, facultatif) Démontre la propriété (2) des fractions de nombres réels.

Exercice 4

NO211 Puissances de dix

L'opération 10000 · 100 peut s'effectuer en utilisant l'écriture des puissances de dix :

$$10000 \cdot 100 = 10^4 \cdot 10^2 = 10^{4+2} = 10^6 = 1\,000\,000.$$

Procède de la même manière pour trouver les résultats des opérations suivantes.

a) 1000 · 1000 = ……

b) 100000 · 1000 = ……

c) 10000 · 0,001 = ……

d) 1000 · 0,001 = ……

e) 0,001 · 0,01 = ……

f) 0,0001 · 100 · 0,01 = ……

g) $0{,}01^3$ = ……

h) 0,01 : 100 = ……

i) 100000 : 0,01 = ……

j) 10 : 10000 = ……

puissance	nombre	nom
...		
10^{24}		quadrillion
10^{21}		trillard
10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	trillion
10^{15}	1 000 000 000 000 000	billiard
10^{12}	1 000 000 000 000	billion
10^{9}	1 000 000 000	milliard
10^{6}	1 000 000	million
10^{3}	1 000	mille
10^{2}	100	cent
10^{1}	10	dix
10^{0}	1	un
10^{-1}	0,1	dixième
10^{-2}	0,01	centième
10^{-3}	0,001	millième
10^{-6}	0,000 001	millionième
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième
10^{-12}	0,000 000 000 001	billionième
10^{-15}	0,000 000 000 000 001	billiardième
10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	trillionième
10^{-21}		trilliardième
10^{-24}		quadrillionième
...		

Les calculatrices ne peuvent souvent pas afficher plus de 10 chiffres, mais elles permettent facilement de transformer les nombres de notation décimale en notation scientifique (souvent avec une touche EE ou un mode noté SCI) ; le mode d'affichage n'est pas forcément bien clair : « 3 E 11 » signifie bien $3 \cdot 10^{11}$, par exemple.
On trouve encore parfois la touche (ou le mode) ENG : cette notation, appelée « ingénieur », utilise également les puissances de dix, mais en n'en conservant que les exposants qui sont des multiples de 3 (10^3, 10^6, 10^9, 10^{-9}...) ; le nombre multiplié par la puissance de dix sera ainsi supérieur ou égal à 1 et inférieur à 1000.
Par exemple : 72500000 s'écrira $72{,}5 \cdot 10^6$. Cette notation permet de transformer plus facilement les unités principales (passage de nano à micro, milli, kilo, méga, etc.).

A titre indicatif, dans les pays anglo-saxons, 1 milliard se dit « one billion » !

Exercice 5

Donne la réponse au million de synapses près pour b) et au milliard de neurones près pour c).

NO213 Faites marcher vos neurones !

Notre cerveau est constitué d'environ cent milliards de neurones, chacun d'eux étant connecté à dix mille de ses semblables.

A l'aide de puissances de dix, exprime les nombres suivants.

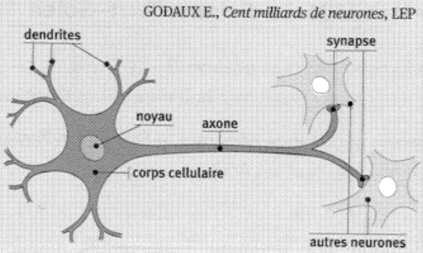
a) Le nombre de neurones présents dans notre cerveau.

b) Le nombre de connexions dans ce même cerveau.

c) A la naissance, un enfant possède tous ses neurones.
En vieillissant, leur nombre diminue d'environ cinquante mille par jour.
Après combien d'années (365 jours) avons-nous épuisé notre réserve ?

«[...] Un neurone ressemble à une pieuvre, avec des bras qui partent dans tous les sens. A partir d'un corps cellulaire central, plus ou moins sphérique, rayonnent plusieurs expansions. Il y en a de deux types. Un bras cellulaire est soit un dendrite, soit un axone. Le type de neurone le plus répandu dans le cerveau possède plusieurs dendrites, mais un seul axone. [...]
L'axone transporte l'information neuronale vers d'autres neurones du cerveau. Cela nous conduit à introduire un nouveau mot clé: la synapse. Celle-ci est la zone où l'extrémité de l'axone entre en contact avec un autre neurone.
Les contacts synaptiques sont les endroits privilégiés où l'information passe d'un neurone à l'autre. On les trouve sur les corps cellulaires et sur les dendrites. Il n'y en a pas sur l'axone. L'information atterrit sur le neurone au niveau de son corps cellulaire et de ses dendrites. Elle en sort par l'axone. [...] »

GODAUX E., *Cent milliards de neurones*, LEP



Exercice 6

Notation scientifique.

Partie A. Affiche un maximum de 9 sur l'écran de ta calculatrice. Ajoute 1. Que se passe-t-il ? Pourquoi ? Quel est le plus grand nombre que tu peux afficher avec ta calculatrice ?

Partie B. Écris chaque nombre proposé en notation scientifique, effectue ensuite et donne la réponse du calcul en notation scientifique, puis en notation décimale :

(a) $2000 \cdot 0{,}0014$

(b) $0{,}024 \cdot 0{,}0011$

(c) $(0{,}07)^2$

(d) $(-21{,}2)^2$

(e) $0{,}0012 : 0{,}04$

(f) $15000 : 0{,}005$

(g) $(-250)^2 \cdot (-0{,}001)^3$

(h) $(0{,}05)^{-1} : (0{,}005)^{-2}$

Partie C. Ecris les nombres qui apparaissent dans les phrases suivantes en notation scientifique :
- Certains ordinateurs exécutent une opération en 0,00000001 seconde.
- La distance de la Terre à la Nébuleuse d'Andromède est de 2 millions d'années-lumière (donne la réponse en kilomètres ! Rappelons que la lumière parcourt $3 \cdot 10^5$ kilomètres par seconde).

Exercice 7

Un peu de théorie. On demande une démonstration avec tous les détails et les justifications !

(a) Calcule $(a-b)^3$ où a et b sont des nombres réels. Justifie chaque étape du calcul en écrivant une égalité par ligne et en justifiant chaque étape.

(b) Démontre que $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ si n est pair.

(c) Démontre les propriétés des racines (2) (racine d'un quotient) et (5) (produit de deux racines d'un même nombre) de la Proposition 2.4.

(d) Démontre la propriété des puissances rationnelles (2) : $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$. Tu peux t'inspirer de la démonstartion du film 18, sans oublier de corriger la petite erreur qui s'est glissée à la dernière ligne...

Exercice 8

Racines (sans calculatrice).
Partie A. Dans chaque liste, trouve lequel des nombres est différent des autres :

(a) $\sqrt{60}$, $\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}$, $2\sqrt{15}$, $3\sqrt{20}$, $\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{27}$, $\sqrt{20+7}$, $3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $3\sqrt{9}$.

(c) $\sqrt{441}$, $\sqrt{49}\cdot\sqrt{9}$, $7\sqrt{9}$, $\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$, $\sqrt{400}+\sqrt{1}$.

(d) $\sqrt{\frac{25}{64}}$, $\frac{1}{8}\sqrt{25}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2{,}5}{6{,}4}$, $\frac{5}{\sqrt{64}}$.

Partie B. Extraction de racines. Simplifie chaque expression au maximum. Par exemple $\sqrt{12} = \sqrt{3\cdot 4} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 2\sqrt{3}$.

(a) $\sqrt{175}$
(b) $\sqrt{300}$
(c) $\sqrt[3]{1080}$
(d) $5\sqrt{252}$
(e) $\sqrt{18}+\sqrt{32}$
(f) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
(g) $\sqrt[3]{-125}$

Partie C. Extraction de racines. Donne la réponse sans aucun symbole de racine !

(a) $\sqrt{900}$
(b) $\sqrt{0{,}04}$
(c) $\sqrt[3]{1000000}$
(d) $\sqrt{10^6}$
(e) $\sqrt{\frac{4}{9}}$
(f) $\sqrt{0{,}25}$
(g) $\sqrt[3]{-1}$
(h) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{800}$
(i) $\sqrt{17}^2$
(j) $\sqrt{1521}$
(k) $\sqrt{81}+\sqrt{121}$
(l) $\sqrt{12}:\sqrt{3}$

Exercice 9

Les nombres a et b étant réels, énonce les conditions d'existence des expressions suivantes. Par exemple l'expression $\sqrt{-a}$ existe si $a \leq 0$.

1. $\sqrt{ab}$
2. $\sqrt{-ab}$
3. $\sqrt{-a^3b^3}$
4. $\sqrt{\frac{a}{b}}$
5. $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$
6. $\sqrt{\frac{ab}{b}}$
7. $\sqrt{\frac{-a^2}{b}}$
8. $\sqrt{-a^2b}$

Dans les exercices suivants, l'auteur utilise le mot "radicaux" pour racines.

Exercice 10

9. Simplifie les expressions suivantes en te servant des propriétés des radicaux ($a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}_0^+$, $c \in \mathbb{R}^+$) :

1) $\sqrt{a^2bc^3}$ 3) $\sqrt{a^3b^3c^4}$

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3}$ 4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2}$

10. Simplifie les expressions suivantes après avoir précisé les conditions d'existence et sans changer celles-ci :

a. 1) $\sqrt{a^4b^2}$ 3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$

2) $\sqrt{a^7b^3}$ ★ 4) $\sqrt{a^3b^4}$

Exercice 11

5. À l'aide des propriétés des radicaux d'indice deux, rends rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ 3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ 5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

6. À l'aide des propriétés des radicaux d'indice deux, rends rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

1) ($a \in \mathbb{R}_0^+$, $b \in \mathbb{R}_0^+$) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{1}{\sqrt{ab}}$

2) ($a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{1}{\sqrt{ab}}$

Exercice 12

Complète à l'aide des signes $\leqslant$, $<$, $=$, $>$ ou $\geqslant$ les énoncés suivants :

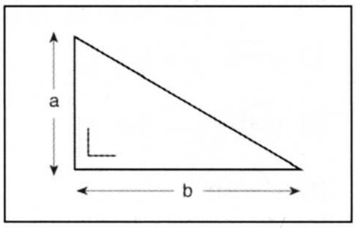
1) $\sqrt{16+9}$ ... $4+3$

2) $\sqrt{25+5}$ ... $5+\sqrt{5}$

3) $\sqrt{8+3}$ ... $\sqrt{8}+\sqrt{3}$

4) $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$ ($a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+$)

Pour ce faire, tu peux t'aider d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont a et b pour mesure et t'inspirer de l'inégalité triangulaire•.



5) $\sqrt{a^2+0}$ ... $a+0$ ou $\sqrt{0+b^2}$ ... $0+b$ ($a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+$)

D'où si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on a $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$.

6) Pour a et b des nombres réels non nuls, quels sont les relations d'égalité ($=$), de non égalité($\neq$), et d'ordre ($<, \leq$) que l'on peut éventuellement établir entre

$$\sqrt{a^2+b^2}, \quad a+b, \quad \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}, \quad |a|+|b|$$

Exercice 13

Partie A. Calcule les expressions suivantes en utilisant les propriétés des puissances rationnelles (sans passer par des racines).

(a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$

(b) $7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$

(c) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{-\frac{3}{4}}$

(d) $\frac{2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}$

(e) $\frac{27^{\frac{4}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

(f) $(-27)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-1}$

Partie B. Ici $a > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Ecris les expressions suivantes à l'aide d'exposants :

(a) $\sqrt{a}$, $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt{a^7}$, $\sqrt{a^2}$

(b) $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^9}$, $\sqrt[4]{a^{12}}$, $\sqrt[4]{a^{18}}$

(c) $\sqrt{a^0}$, $\dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[4]{a^4}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$, $\dfrac{\sqrt[16]{a^8}}{\sqrt[7]{a^{28}}}$

(d) $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^6}}$, $\sqrt[8]{\dfrac{a^{24}}{a^{12}}}$, $\left(\sqrt[7]{a^6}\right)^2$

(e) $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[3]{a^{2n}}$, $\sqrt[3m]{a^{6n}}$,

(f) $\dfrac{a^n}{\sqrt[m]{a^0}}$, $\sqrt[2m]{\dfrac{a^{3n}}{a^{2n}}}$, $\dfrac{\sqrt[8m]{a^{2n}}}{\sqrt[3m]{a^n}}$

Partie C. Ici $a > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Ecris les expressions suivantes sous forme de racine et de puissance :

(a) $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, $a^{\frac{7}{1}}$

(b) $a^{\frac{4}{6}}$, $a^{\frac{16}{12}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$

(c) $a^{\frac{1}{m}}$, $a^{\frac{n}{m}}$, $a^{-\frac{1}{m}}$

(d) $a^{-\frac{n}{m}}$, $a^{\frac{2n}{6m}}$

Exercice 14

13. Calcule, sans l'aide de ta calculatrice, en ne laissant ni exposant ni racine dans ta réponse :

1) $\sqrt{81}$
2) $\sqrt[3]{27}$
3) $\sqrt[3]{-125}$
4) $-\sqrt[3]{8}$
5) $\sqrt[4]{16^2}$
6) $\sqrt[3]{8^{-1}}$
7) $\sqrt[6]{4^{-9}}$
8) $\sqrt[3]{-2^6}$

14. Calcule à l'aide de ta machine, la valeur approchée de la racine cubique à 10^{-2} près par défaut des réels suivants :

1) -65
2) π
3) $\sqrt{5}$
4) $\sqrt{456}$
5) $1 - \sqrt{3}$
6) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$

15. En utilisant les propriétés des racines nièmes, effectue et simplifie :

1) $\sqrt[3]{9}\ \sqrt[3]{3^7}$
2) $\sqrt[3]{16}\ \sqrt[3]{32}$
3) $\sqrt[3]{a^4}\ \sqrt[3]{a^5}$
4) $\dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{2}}$

16. ★

Rends rationnels les dénominateurs des fractions suivantes :

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$
3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$
4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}$
5) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}}$
6) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}$

17. Calcule le carré et le cube de :

1) $\sqrt[3]{2}$
2) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$
3) $\sqrt[3]{3} + 1$
4) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

18. Écris plus simplement et donne les conditions d'existence :

1) $\sqrt{\sqrt{a^2}}$
2) $\sqrt[3]{\sqrt{b^2}}$
3) $\sqrt{\sqrt[3]{b^2}}$
4) $\sqrt{\sqrt[3]{-a^2}}$

19. Effectue et simplifie :

1) $\sqrt[3]{4}\ .\ \sqrt{2}$
2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{3}}$

Exercice 15

Besoin de se changer les idées ? Quelle est la somme des chiffres de $10^{2017} - 2017$?

Exercice 16

Un exercice historique et facultatif sur le calcul de π pour finir. Tu trouveras ci-dessous le calcul des quatre premières approximations.

215. Les chasseurs de π

Newton, mathématicien anglais du XVII[e] siècle, a trouvé que :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Un autre mathématicien, le Suisse Léonard Euler, a montré, quant à lui, que :

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Au XVII[e] siècle toujours, un troisième mathématicien, Lord Brouncker, a utilisé une présentation encore plus surprenante à l'aide de ce que l'on appelle une fraction continue :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ldots}}}}}$$

n° du terme : 1 2 3 4 5 6 ...

Quelles sont les approximations successives de π que tu obtiens en prenant 1 terme, puis 2 termes, puis 3 termes et ainsi de suite, pour chacun de ces trois développements ?

Etape	1	2	3	4
Newton	3	3,125	3,139062	3,141155
Euler	3,130169	3,139785	3,1410	3,141348
Brouncker	4	2,666	3,4666	2,895