COURS EULER: PROGRAMME DE LA TROISIÈME ANNÉE

1. Module 1 : Probabilités et statistiques

1.1. Combinatoire.

(1) Le principe fondamental de la combinatoire
- Cardinalité d'un ensemble fini
- Cardinalité de l'union, de l'intersection et du produit cartésien de deux ensembles finis
- Principe fondamental de la combinatoire
- Exemples

(2) Permutations
- Permutations simples
- Permutations avec répétitions
- Exemples

(3) Arrangements
- Arrangements simples
- Arrangements avec répétitions
- Exemples

(4) Combinaisons
- Combinaisons simples
- Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton
- Coefficients multinomiaux et développement de la puissance d'un polynôme
- Combinaisons avec répétitions
- Le problème du partitionnement d'un ensemble fini et le problème de la répartition des boules dans des urnes.

1.2. Probabilités.

(1) Axiomes de probabilités
- Ensemble fondamental d'une expérience

- Evénements
- Lois de Morgan
- Fonction de probabilité
- Propriétés élémentaires sur les probabilités des parties de l'ensemble fondamental

(2) Probabilités conditionnelles
- Définition et exemples
- Formule de multiplication
- le jeu de Monty Hall
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Le problème de rencontre de Montmort

(3) Indépendance d'événements : définition et exemples.

1.3. **Statistiques.**

(1) Variables aléatoires
- Définition
- Fonction de répartition

(2) Espérance
- Définitions (modalité, mode, médiane)
- Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire
- Linéarité de l'espérance
- Calculs avec lancers de dés, tirages de carte, jeux de hasard

(3) Variance, covariance et corrélation
- Définitions et motivation
- Formule en fonction de l'espérance de la variable et son carré
- L'écart-type
- Indépendance de deux variables aléatoires et lien avec la covariance
- Formule de la covariance en fonction de l'espérance du produit et du produit des espérances
- Définition du coefficient de correlation

- Bornes supérieure et inférieure du coefficient de corrélation
- Dépendance linéaire de deux variables aléatoires

(4) Régression
- Régression linéaire
- Méthode des moindres carrés
- Détermination de la meilleure approximation affine d'une variable en fonction d'une autre
- Le cas où le coefficient de corrélation vaut 1
- Le cas où le coefficient de corrélation est nul

(5) La loi normale
- idée de l'approximation normale, basée sur un échantillon comme approximation d'une variable aléatoire
- Formule de la densite
- Espérance d'une variable aléatoire normale

2. Module 2 : Dérivation et nombres complexes

2.1. **La dérivée d'une fonction réelle.**

(1) Rappel sur les limites de suites et de fonctions

(2) Définition géométrique de la dérivée, pente de la tangente

(3) Modélisation analytique de la dérivée comme limite

(4) Calcul dans les cas simples : puissance entière, sinus et cosinus

(5) Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, quotient, composition et fonction réciproque

(6) Théorème de Rolle et Théorème des accroissements finis

(7) Quand deux fonctions ont-elles la même dérivée ?

(8) Primitives

2.2. **Etude de fonction.**

(1) Rappels sur les asymptotes

(2) Maximum et minimum sur un intervalle fermé

(3) Croissance et signe de la dérivée

(4) Convexité et signe de la dérivée seconde

(5) Points d'inflexion

2.3. **Exponentielle et logarithme.**

(1) Définition de l'exponentielle réelle comme somme infinie

(2) Etude de la fonction e^x

(3) Définition du logarithme (de base e et de base a)

(4) Etude de la fonction $\ln x$

(5) Les fonctions puissance et exponentielle de base a

2.4. **Applications.**

(1) Le théorème de Bernoulli-L'Hospital, calcul de limites

(2) Définition des fonctions de trigonométrie hyperbolique

(3) Fonctions hyperboliques réciproques

(4) Problèmes d'optimisation (boîte de conserve, etc.)

2.5. **Nombres complexes.**

(1) Définition de i

(2) Vision cartésienne du plan complexe : partie réelle et partie imaginaire

(3) Vision polaire du plan complexe : module et argument

(4) La somme et le produit, interprétation cartésienne et polaire

(5) Calcul de racines et résolution d'équations

(6) Les similitudes du plan sous forme complexe

(7) L'exponentielle complexe, définition et propriété

(8) Description de $e^{i\theta}$, Formule d'Euler, écriture du sinus et du cosinus

(9) Détermination principale du logarithme complexe

3. Module 3 : Algèbre linéaire

3.1. **Les groupes.**

(1) Lois de composition, exemples élémentaires (addition, multiplication, soustraction, division, intersection, union, etc.)

(2) Associativité et élément neutre, unicité de l'élément neutre

(3) Inversibilité et commutativité

(4) Définition d'un groupe, table de multiplication

(5) Définition de sous-groupe et critère

(6) Exemples de groupes d'isométrie de polygones réguliers

3.2. **Anneaux et corps.**

(1) Définition d'anneau et d'anneau commutatif

(2) Propriétés élémentaires et exemples (anneau nul, $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.)

(3) Anneau des parties d'un ensemble, anneau de matrices carrées

(4) Définition de sous-anneau et critère

(5) Définition de corps, exemples

(6) Construction de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme classes de congruence modulo n

(7) Les corps de p éléments, p premier.

3.3. **Espaces vectoriels.**

(1) Définition d'espace vectoriel et propriétés élémentaires

(2) Exemples de base K^n et $\mathcal{F}(X, K)$ pour un ensemble X

(3) Définition de sous-espace et critère, exemples

(4) Intersection et somme de sous-espaces

(5) Définition de système de générateurs, de partie libre, liée (vecteurs linéairement (in)dépendants)

(6) Définition de base, l'exemple de la base canonique de K^n

(7) Théorème de la base incomplète

(8) Notion de dimension

(9) Formule de la dimension d'une somme de sous-espaces

3.4. **Applications linéaires.**

(1) Définition d'homomorphisme, de groupes et d'anneaux

(2) Définition d'application linéaire, lien avec les sous-espaces

(3) Etude de l'image et du noyau, critère d'injectivité

(4) Le Théorème du rang et ses conséquences

(5) La matrice d'une application linléaire

(6) Identification de tout espace vectoriel de dimension finie avec K^n

(7) La dimension de l'espace des applications linéaires $\alpha : V \to W$

3.5. **Le produit matriciel.**

(1) Rappel de la définition du produit matriciel

(2) Correspondance du produit matriciel et de la composition d'applications linéaires

(3) Représentation d'une même application linéaire dans des bases différentes, changement de base

(4) Définition de matrices équivalentes, caractérisation

(5) Définition de matrices semblables, motivation et caractérisation

3.6. **Matrices inversibles.**

(1) Définition de matrice inversible

(2) Unicité de l'inverse (à gauche et à droite)

(3) Caractérisation de l'inversibilité comme matrice d'un isomorphisme ou matrice de changement de base

(4) Les matrices élémentaires de trois types et leur effet par multiplication

3.7. **Applications.**

(1) Définition du rang, identification avec le rang-colonne

(2) Définition du rang-ligne, identification avec le rang-colonne (la preuve n'est pas demandée)

(3) Invariance du rang par opérations élémentaires

(4) La méthode de Gauss, échelonner et réduire

(5) Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires homogènes et inhomogènes

(6) Caractérisation d'un système sans solution

(7) Application au calcul de l'inverse d'une matrice

(8) Définition de matrice diagonalisable, valeur propre, vecteur propre, espace propre

(9) Détermination des valeurs propres (sans déterminant), calcul des espaces propres avec la méthode de Gauss

4. **Module 4 : Intégration**

Remarque 4.1. *Ce module se fait en deux parties. Une première partie en troisième année avec principalement les techniques d'intégrations, puis une deuxième partie en début de quatrième année avec les applications.*

4.1. **Calcul intégral : partie historique.** *Dans cette partie, la notion des sommes de Riemann et celle de la continuité par morceaux ne sont vues qu'en quatrième année.*

(1) Le calcul d'Archimède de l'aire d'une spirale, l'idée des découpages de plus en plus fins

(2) Les idées de la fin de la renaissance, puis Newton, Leibniz, Cauchy et Riemann

(3) Définition des sommes de Darboux et des sommes de Riemann (subdivision, pas d'une subdivision)

(4) Définition d'une fonction intégrable, intégrale indéfinie

(5) Comparaison de l'intégrabilité au sens de Darboux et de Riemann, utilisation des subdivisions régulières

(6) Savoir montrer l'intégrabilité de fonctions simples (monômes, exponentielle, etc.)

(7) Intégrabilité des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné

(8) Intégrabilité de la somme, de la valeur absolue et du produit de fonctions intégrables

(9) Intégrabilité du quotient de fonctions intégrables (sous certaines conditions)

(10) Intégrabilité des fonctions continues par morceaux

4.2. **L'intégrale définie.**

(1) L'intégrale en fonction de ses bornes

(2) Préservation des inégalités par intégration

(3) Le Théorème de la moyenne (connaître la démonstration)

(4) Le Théorème fondamental du calcul intégral

(5) Définition de la primitive, calcul d'intégrales définie via la recherche de primitives

(6) Linéarité de l'intégrale définie et application au calcul d'aire de surfaces délimitées par des courbes

(7) Valeur absolue de l'intégrale et intégrale de la valeur absolue

(8) Inégalité de Cauchy-Schwarz

4.3. **Techniques d'intégration.**

(1) Le changement de variable, approche par la dérivation et approche par la géométrie

(2) Quelques changements de variables classiques

(3) L'intégration par parties

(4) Formules de récurrence pour des intégrales, pour des fonctions de type $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$

(5) Applications de l'intégration par parties à certaines fonctions trigonométriques

(6) Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

(7) Intégration des éléments simples (connaître la démonstration pour les éléments simples de la forme $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{A}{x^2+rx+s}$).

4.4. **Longueurs, aires et volumes.** *Cette partie, quasiment dans son intégralité, n'est vue qu'en quatrième année.*

(1) Longueur de l'arc d'une courbe comme intégrale

(2) Calcul de longueur de courbes : arc de cercle, astroïde, cardioïde, cycloïde, etc.

(3) Définition de l'aire totale d'une surface déterminée par le graphe d'une fonction

(4) Formule de l'aire d'une surface de révolution (la démonstration ne sera pas demandée lors du test)

(5) Aires de cônes, cônes tronqués, sphères, secteurs de sphères. etc.

(6) Formule du volume d'un corps de révolution (connaître la démonstration)

(7) Volumes de boules, de tores, d'hyperboloïdes, de la "trompette de Gabriel", etc.

4.5. **Intégrale généralisées.** *Cette partie, quasiment dans son intégralité, n'est vue qu'en quatrième année.*

(1) Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle ouvert et borné

(2) Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle non borné

(3) Intégrabilité des fonctions de type x^α (connaître la démonstration)

(4) Critère de convergence (connaître la démonstration)

(5) Convergence absolue et convergence simple

(6) Calcul d'aires et de volumes de surfaces de révolution "infinies"

5. Module 5 : Géométrie

Remarque 5.1. *Les derniers cours de ce module ne font pas partie du programme gymnasial de mathématiques. Néanmoins, ils sont intéressants du point de vue de la culture générale, c'est pourquoi ils sont faits en fin d'année et par conséquent ne sont pas testés.*

5.1. **Compléments de géométrie plane.**

(1) Description du cercle comme lieu géométrique, par son équation cartésienne, par son expression vectorielle

(2) Les cercles exinscrits, les bissectrices extérieures

(3) L'angle entre deux courbes, calculs d'angles entre cercles et droites

5.2. **Les coniques.**

(1) Définition des coniques par foyer et directrice

(2) Caractérisation bifocale des conique

(3) Description des coniques par leur équation cartésienne (axe horizontal ou vertical)

(4) Description paramétrique des coniques (fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques)

(5) Détermination du foyer et de l'excentricité, résolution de problèmes

(6) Définition des coniques comme "sections coniques"

(7) La méthode des sphères de Dandelin pour se ramener à la définition focale

(8) L'équation générale d'une conique (équation du second degré en x et y)

(9) Changement de repère pour se ramener à l'équation canonique

(10) Etude du discriminant et conséquence sur la forme de la conique

(11) Détermination des sommets, foyers, etc, à partir de l'équation générale

5.3. **Polaire et inversion.**

(1) Rappel sur la puissance d'un point relativement à un cercle (Théorème du produit constant)

(2) Définition et construction de l'axe radical de deux cercles

(3) Définition et construction de la polaire d'un point par rapport à un cercle

(4) Théorème de réciprocité

(5) Définition de l'inversion

(6) Construction de l'inverse d'un point

(7) Détermination théorique et construction des inverses de droites et de cercles

(8) L'inversion préserve les angles

(9) Résolution du problème d'Apollonius (cercle tangent simultanément à trois cercles donnés)

5.4. **Compléments de géométrie dans l'espace.**

(1) Rappel sur le produit vectoriel

(2) Définition des mouvements dans l'espace (et le plan)

(3) Description explicite de la rotation continue, de la translation continue et du renversement continu

(4) Caractérisation du produit vectoriel comme l'unique application bilinéaire invariante par mouvements (à un facteur près)

(5) Bilinéarité du produit scalaire

(6) Applications du produit vectoriel : calcul d'angle, d'aire, de volume, de vecteur normal à un plan, etc.

(7) Rappels sur la sphère (lieu géométrique, équation cartésienne, expression vectorielle)

(8) Angles entre sphères et plans

(9) Plans bissecteurs et plan médiateur

(10) Théorème des trois perpendiculaires

(11) La projection orthogonale

(12) Les tétraèdres orthocentrique, régulier, équifacial et trirectangle