

COURS EULER: PROGRAMME DE LA PREMIÈRE ANNÉE

Le cours de la première année concerne les sujets de 9ème et 10ème années scolaires. Il y a bien sûr des différences puisque nous commençons par exemple par un sujet de théorie des ensembles pour que les élèves puissent baser leurs raisonnements sur des fondations formelles et que la géométrie plane est traitée de manière synthétique. Un élève du cours Euler doit comprendre pourquoi les bissectrices d'un triangle quelconque se coupent en un seul point plutôt que d'uniquement l'observer et l'appliquer dans la résolution de problèmes (ce qu'il doit savoir faire aussi!). Quelques sujets sont ainsi repoussés à la deuxième année (géométrie dans l'espace par exemple).

Pour aider à la comparaison avec les objectifs du PER, nous avons indiqué en début de section et en italique quels buts sont atteints et quelles "attentes fondamentales" correspondent à chaque partie. Il y a bien sûr d'autres compétences que celles du PER qui sont atteintes.

1. MODULE 1 : ENSEMBLES, NOMBRES NATURELS, ENTIERS ET RATIONNELS

Remarque 1.1. *On commence dans ce module à exercer la démonstration, en cours et en exercices. Les sujets indiqués donnent le contenu théorique du cours sans entrer dans les détails des exercices abordés. Ce module correspond principalement à une partie de MSN 32.*

1.1. Notions de théorie des ensemble. *L'élève apprend à choisir et mettre en relation des données, à communiquer sa démarche et ses résultats par l'utilisation d'un vocabulaire précis, adéquat et commun à tous, d'une syntaxe et de symboles adéquats.*

(1) Éléments de logique

Permettent de trier et organiser des informations; mettre en oeuvre une démarche de résolution; poser des conjectures et les réfuter ou les valider; déduire des informations nouvelles.

- Affirmations
- Conjonction et disjonction d'affirmations
- Négation d'affirmations
- Implication et équivalence
- Contraposée
- Tables logiques

(2) Appartenance et inclusion

Permet parfois de réduire la complexité d'un problème. Apprentissage de l'importance des accolades et parenthèses.

- Éléments, définition d'ensembles par liste et par propriété
- Sous-ensembles
- Ensemble des parties

(3) Opérations sur les ensembles

Symboles et vocabulaire adéquat. Lecture de données, réalisation et interprétation de diagrammes.

- Réunion
- Intersection
- Différence et complémentaire

1.2. Les nombres naturels. *L'élève utilise des propriétés des nombres et des opérations pour établir des preuves. Importance des parenthèses.*

(1) Opérations sur les nombres naturels

- Propriété de l'addition et de la multiplication
- Définition de la soustraction à partir de l'addition, propriétés, inégalité
- Définition de la division à partir de la multiplication, propriétés

(2) Multiples et diviseurs

Reconnaissance et utilisation de propriétés des nombres naturels : divisibilité, multiples et diviseurs communs. L'élève sait déterminer ppmc, pgdc de deux nombres. Nombres premiers, produits de facteurs, décomposition d'un nombre inférieur à 1000 en produit de facteurs premiers. Critères de divisibilité.

- Multiples, multiples communs, ppmc
- Diviseurs, diviseurs communs, pgdc, critères de divisibilité
- Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, application au calcul du ppmc et du pgdc

1.3. Les nombres entiers relatifs. *Comparaison, approximation, encadrement, représentation sur une droite et ordre de grandeur.*

(1) Définition des entiers et de leurs opérations

- Signe et valeur absolue d'un entier
- Définition de l'addition et propriétés, opposé d'un nombre, valeur absolue.
- Définition de la soustraction et soustraction via l'opposé, valeur absolue, soustraire c'est additionner l'opposé
- Définition de la multiplication. Divisibilité et division. Propriétés des opérations sur les entiers

(2) Ecriture des opérations multiples (priorité des opérations)

Connaissance et priorité des opérations (y compris parenthèses). Connaissance et utilisation des opérations pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace et pour donner des estimations.

- Utilisation des parenthèses
- Simplification d'écriture et règles conventionnelles de priorité
- Différence entre parenthèses superflues (par associativité par exemple) et parenthèses nécessaires

1.4. Les nombres rationnels.

(1) L'ensemble des rationnels

Écriture fractionnaire, y compris simplification et amplification. Amplifie, simplifie et rend irréductible une fraction, la représente géométriquement.

Compare, ordonne, encadre, intercale des nombres rationnels.

- Fractions et équivalence de fractions
- Simplification et amplification de fractions
- Fractions irréductibles

(2) Opérations sur les rationnels

Connaissance et priorité des opérations (y compris parenthèses). Connaissance et utilisation des opérations. Effectue des calculs, utilise un algorithme pour effectuer somme, différence, produit et division de nombres rationnels arbitraires.

- Définition de la multiplication et propriétés. Inverse et division.
- Définition de l'addition et soustraction

(3) Écriture décimale

Reconnaît et utilise différentes écritures d'un même nombre et passe de l'une à l'autre. Notation scientifique. Extrait le nombre entier de dizaines, centaines, milliers, etc, et de dixièmes, centièmes, millièmes, etc.

- Nombres décimaux
- Nombres périodiques
- Passage d'une écriture à l'autre dans les deux sens et dans les deux cas (décimaux et périodiques)

2. MODULE 2 : NOTIONS DE BASE DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE ET ANGLES

Remarque 2.1. *Nous avons suivi une approche axiomatique de la géométrie euclidienne. Certains résultats ont été démontrés dans le cours. Nous ne l'avons spécifié que dans les cas les plus importants. De plus, sauf mention contraire, pour toutes*

les figures géométriques introduites nous avons vu leur construction à la règle et au compas (accompagnée d'une marche à suivre). L'exercice d'écriture de marches à suivre et de démonstrations s'est fait tout au long du module. Ce module correspond principalement à une partie de MSN 31.

2.1. Nécessité de l'axiomatique. *De par sa nature axiomatique (synthétique), ce module demande aux élèves d'apprendre à trier et organiser les informations pertinentes à la résolution d'un problème géométrique, de mettre en oeuvre une démarche de résolution, d'ajuster des essais consécutifs, de poser des conjectures (puis de les valider ou de les réfuter), de déduire des informations nouvelles à partir de celles qui sont connues, de réduire la complexité d'un problème, d'utiliser des propriétés de figures et de transformations géométriques pour établir des preuves, de vérifier et communiquer une démarche et un résultat en utilisant un vocabulaire et des symboles adéquats, de réaliser un croquis comme support de réflexion et pour communiquer des informations sans ambiguïté.*

- (1) Objets d'étude idéaux. Notions indéfinies et définies
- (2) La démonstration en géométrie. Axiomes et preuves
- (3) Les notions définies et indéfinies de la géométrie euclidienne

2.2. Notions et axiomes de base. *Reconnaît, nomme, décrit et construit les objets étudiés ci-dessous. Utilisation de la règle. Compare, classe et mesure longueurs par manipulation de lignes en utilisant des unités de mesures conventionnelles ou non. Prise de mesure de longueurs. Exprime une même longueur dans différentes unités.*

- (1) Plan, points, figures, droites
- (2) Segments. Demi-droites et demi-plans. Lignes polygonales, polygones.
- (3) Distance de deux points. Périmètre, inégalité triangulaire.

2.3. Symétries axiales et perpendicularité. *Reconnaît, nomme, décrit et construit des figures planes selon leurs propriétés de symétrie et perpendicularité. Reconnaît et nomme les symétries axiales.*

(1) Transformations géométriques. Introduction aux isométries.

(2) Symétries axiales

- Axiome de symétrie.
- Axes de symétrie.
- Preuve de la validité de la construction du symétrique d'un point.

(3) Lieux géométriques : Cercle et notions liées au cercle.

(4) Perpendicularité

Reconnait, nomme, décrit et construit les objets étudiés ci-dessous. Utilisation du compas.

- Médiatrice comme axe de symétrie et lieu géométrique.
- Perpendicularité comme symétrie.
- Perpendiculaire à une droite passant par un point (preuve de l'existence et unicité).
- Projection d'un point sur une droite.
- Distance d'un point à une droite.

2.4. Définition et vocabulaire sur les angles. *Reconnait, nomme, décrit et construit les objets étudiés ci-dessous.*

(1) Définition de l'angle rectiligne comme réunion de deux demi-droites d'extrémité commune et notations

(2) Vocabulaire

Reconnait, nomme, décrit et construit les objets étudiés ci-dessous et relatifs aux angles.

- Angles nuls, plats, droits, aigu, obtus
- Angles adjacents, adjacents supplémentaires, supplémentaires, adjacents-complémentaires, complémentaires
- Angles opposés par le sommet

(3) Angles-plans intérieur et extérieur d'un angle rectiligne, angles-plan saillants et rentrants.

2.5. **La bissectrice.** *Reconnait, nomme, décrit et construit une bissectrice.*

- (1) La bissectrice comme axe de symétrie
- (2) La bissectrice comme lieu géométrique

2.6. **Théorème de la transversale.** *Reconnait, nomme, décrit et construit des droites parallèles, les symétries centrales*

- (1) Droites parallèles. Axiome des parallèles.
- (2) Symétries centrales
 - Centre de symétrie.
 - Action sur une droite passant ou ne passant pas par le centre (preuve).
- (3) Théorème de la transversale *Connaît, nomme, décrit et construit des angles alternes-internes.*
 - Théorème dans les deux sens (isométrie des angles ou parallélisme des droites).
 - Angles alternes-internes, alternes-externes, correspondants.
 - Preuve de l'isométrie des angles dans le cas de droites parallèles.
- (4) Diverses propositions sur le parallélisme avec preuves. Distance de deux droites parallèles.

2.7. **Mesure des angles-plans.** *Utilisation du rapporteur et de l'équerre. Connaît, nomme, décrit et construit des angles supplémentaires, complémentaires.*

- (1) Terminologie pour les angles-plan
 - Frontière, intérieur d'un angle-plan.
 - Angle-plan nul, plat, droit, aigu, obtus, plein.
 - Angles-plans adjacents, adjacents-supplémentaires, supplémentaires.
 - Angles (rectilignes et plans) adjacents-complémentaires et complémentaires.
- (2) Mesure des angles-plan

(3) Angles des polygones simples

Reconnait, nomme, décrit et construit les objets étudiés ci-dessous. Utilise la somme des angles d'un triangle. Compare, classe et mesure les angles par manipulation de lignes en utilisant des unités de mesures conventionnelles ou non. Prise de mesure d'angles. Mesure le périmètre d'un polygone.

- Polygones simples, intérieur d'un polygone simple.
- Surface polygonale, angle intérieur et extérieur en un sommet.
- Somme des angles du triangle (preuve), figure convexe,
- Somme des angles d'un polygone simple (preuve pour les convexes)
- Construction de l'angle de 60° , construction du triangle équilatéral.
- Application aux quadrilatères et polygones réguliers (carré, hexagone, octogone, dodécagone réguliers).

3. MODULE 3 : LES NOMBRES RÉELS, LES POLYNÔMES, LES FONCTIONS ET LES RELATIONS

Remarque 3.1. *Certains résultats ont été démontrés dans le cours. Nous ne l'avons spécifié que dans les cas les plus importants. Ce module correspond principalement à une partie de MSN 32 et 33.*

La première partie de ce module est idéale pour l'apprentissage de la calculatrice : opérations de base, parenthèses, mise en mémoire et récupération, puissances et racines.

3.1. Nécessité des nombres réels. Découverte de quelques nombres irrationnels.

- (1) Preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$
- (2) Les lacunes de \mathbb{Q}
- (3) Mention de la transcendance de π

3.2. Le corps des réels. *Comparaison, approximation, encadrement de nombres réels.*

- (1) Définition heuristique
 - Propriétés des opérations
 - Notation de quotients de nombres réels en fractions
 - Propriétés des fractions, ordre des réels
- (2) Approximations de nombres réels. Encadrement des racines

3.3. Puissances entières. *Connaissance et utilisation de puissances (multiplication, division, etc.), des carrés parfaits pour extraire une racine, de la notation scientifique.*

- (1) Définition et propriétés
 - Simplification d'expressions
 - Produits remarquables
 - Preuve de certaines propriétés
- (2) Puissances de 10 et notation scientifique

3.4. Racines n -nièmes. *Utilisation et connaissance des racines carrées et cubiques de nombres réels, calculs de produits et de quotients de racines. La calculatrice permet de vérifier le résultat obtenu par des manipulations algébriques, de confronter sa démarche au réel.*

- (1) Définition et existence des racines n -nièmes pour n pair ou impair
- (2) Règles de calcul

3.5. Puissances fractionnaires.

- (1) Définition, existence, indépendance par rapport au choix de la fraction
- (2) Règles de calcul

3.6. Définition heuristique de la K -algèbre libre à n générateurs.

- (1) Rappel de la définition d'un anneau commutatif. Indéterminées
- (2) Structure algébrique de $K[x_1, \dots, x_n]$

3.7. **Monômes.** *Connaissance de la terminologie, écriture ordonnée et réduite de monômes, de degré ≤ 6 .*

- (1) Définition
- (2) Coefficient, partie littérale et degré
- (3) Similitude

3.8. **Polynômes.** *Connaissance de la terminologie, écriture ordonnée et réduite de polynômes, à coefficients entiers et rationnels. Connaît et utilise les règles et convention d'écriture algébrique. Interprète des expressions littérales et identifie celles qui sont équivalentes.*

- (1) Forme réduite, termes
- (2) Égalité de polynômes
- (3) Degré, ordonner

3.9. **Opérations sur les polynômes.** *Opérations : addition, soustraction, multiplication de monômes et de polynômes. Connaissance et utilisation des identités remarquables de degré 2. Utilisation du calcul littéral comme outil de preuve.*

- (1) Somme
- (2) Produit et identités remarquables pour les polynômes
- (3) Différence et opposé d'un polynôme

3.10. **Les relations.** *Utilisation et compréhension de représentations graphiques. Lecture et interprétation d'un tableau de valeurs. Représentation d'une relation où interviennent deux grandeurs variables par un tableau de valeurs, une représentation graphique, un ou plusieurs opérateurs (machines ou expressions verbales). Passage d'une représentation à une autre.*

- (1) Couples et produit cartésien
- (2) Relations : Représentation logique et schématique

- (3) Graphe d'une relation : Représentation ensembliste, représentation graphique
- (4) Composition et réciproque de relations
- (5) Conditions particulières : Injectivité, surjectivité, fonctionnalité, bijectivité

3.11. Les fonctions. *Réalise une représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs, d'une expression fonctionnelle. Détermine une expression fonctionnelle à partir d'un tableau de valeurs dans certains cas. Utilise le langage algébrique pour établir des preuves.*

- (1) Notations et exemples (y compris non numériques)
- (2) Représentation graphique
- (3) Composition de fonctions
- (4) Fonction réciproque
 - caractérisation en termes de relation réciproque
 - caractérisation en tant qu'inverse par rapport à la composition
 - caractérisation comme bijection et par la représentation graphique

3.12. Les fonctions polynomiales. *Détermine, utilise, représente, reconnaît les fonctions affines. Passe d'une représentation à une autre pour ces fonctions. Introduction aux fonctions quadratiques. Résout des problèmes relatifs aux fonctions affines qui font intervenir la distinction des grandeurs en jeu, le choix et la mise en relation des données, l'estimation et la vérification de la pertinence du résultat. Communique la démarche et le résultat par un vocabulaire et des symboles adéquats. Détermine la valeur numérique d'une expression algébrique par substitution. Elaboration d'expression littérale à partir de figures géométriques. Résolution des équations du premier degré à l'aide des règles d'équivalence.*

- (1) Définition générale
- (2) Fonctions affines
 - Ordonnée à l'origine
 - Pente comme quotient et comme coefficient du terme de degré 1

- Représentation graphique
- Equation de la droite, retrouver l'équation à partir de deux points (preuve de ces résultats)
- Relation avec la notion de droite en géométrie euclidienne
- Cas particulier des fonctions linéaires et constantes

(3) Fonctions quadratiques : Premier aperçu, étude qualitative (signe des coefficients)

3.13. Equations polynomiales. *Résout des problèmes de proportionnalité, par exemple quantité/quantité, agrandissement et réduction, pourcentage, masse volumique, pente et vitesse moyenne. Elaboration d'expressions littérales à partir d'énoncés de problèmes. Résolution de problèmes nécessitant le recours à l'algèbre, traduction d'une situation par une équation du premier degré à une ou deux inconnues. Détermine toutes les solutions d'une équation du premier degré.*

(1) Définition générale d'une équation.

- Représentation graphique d'une équation
- Ensemble des solutions
- Équivalence de deux équations
- Racines des polynômes
- Ensemble de définition d'une équation

(2) Equations à valeurs réelles : Théorème d'équivalence des équations

(3) Équations polynomiales

- Définition
- Racines des polynômes,
- Degré d'une équation polynomiale

(4) Résolution des équations de degré 1 et celles équivalentes à des équations de degré 1

4. MODULE 4 : LES ISOMÉTRIES DU PLAN ET LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Remarque 4.1. *Certains résultats ont été démontrés dans le cours. Nous ne l'avons spécifié que dans les cas les plus importants. Les réflexions ont été étudiées en détail lors du module 2. Ce module correspond principalement à une partie de MSN 33 et 31.*

4.1. Composition de transformations géométriques.

Remarque. Les réflexions ont été étudiées en détail lors du module 2.

- (1) Composition de transformations géométriques générales.
- (2) Préservation des isométries par la composition.
- (3) Non-commutativité

4.2. Preuve du théorème de classification des isométries.

- (1) Les isométries sont déterminées par leur action sur un triangle, et il existe une unique isométrie qui transforme un triangle en un triangle isométrique donné.
- (2) Classification des isométries qui transforment un segment en un segment de même longueur donné.
- (3) Théorème : Toute isométrie est la composition d'au plus trois réflexions.

4.3. Les rotations. *Reconnaît et nomme les rotations. Décrit une rotation par son centre et son angle. Construit le centre de symétrie d'une figure plane.*

- (1) Caractérisation en termes de points fixes
- (2) Caractérisation en termes de composée de deux réflexions d'axes concourants ou égaux.
- (3) Caractérisation en termes de centre et d'angle orienté
- (4) Preuve de l'équivalence des ces caractérisations.

4.4. Les translations. *Reconnaît et nomme les translations. Décrit une translation par son vecteur directeur.*

- (1) Caractérisation en termes de points fixes et de préservation de l'orientation.
- (2) Caractérisation en termes de composée de deux réflexions d'axes parallèles ou égaux.
- (3) Caractérisation en termes de vecteur de translation

4.5. Renversements sans points fixes. *A ce moment l'élève sait reconnaître et décrire toutes les isométries du plan. Il les décrit et les identifie par leurs caractéristiques. Il anticipe la position d'une figure après une ou plusieurs isométries. A l'aide d'instruments ou de logiciels, il construit l'image d'une figure plane.*

- (1) Caractérisation en termes de points fixes et de non-préservation de l'orientation.
- (2) Caractérisation comme les isométries qui ne s'expriment que par la composée de trois réflexions.
- (3) Propriétés de certaines compositions de différents types d'isométrie.

4.6. Les triangles.

- (1) Définitions des droites principales des triangles
- (2) Triangles isocèles
 - Caractérisation en termes de côtés, d'angles, de droites principales et d'axe de symétrie
 - Preuve de l'équivalence de ces caractérisations
 - Cas d'isométrie pour des triangles isocèles
- (3) Triangles équilatéraux et rectangles
 - Caractérisation en termes de côtés, d'angles, de droites principales et d'axe de symétrie
 - Cas d'isométrie dans le cas des triangles rectangles
- (4) Preuve des trois cas d'isométrie des triangles

4.7. **Quadrilatères.** *Résout des problèmes de mesurage par choix et mise en relation des données, par distinction des grandeurs en jeu, par choix d'une formule, d'une procédure, d'une unité de mesure.*

- (1) Quadrilatères généraux : Simplicité et convexité des quadrilatères
- (2) Trapèzes : Trapèzes rectangles et isocèles
- (3) Parallélogrammes
 - Centre de symétrie (preuve de l'existence et de l'unicité)
 - Propriétés (preuve de l'isométrie des angles opposés)
 - Caractérisation par différents critères (côtés, diagonales)
 - Rectangles (y compris caractérisation par ses diagonales)
- (4) Rhomboïdes : Cerf-volants et fers de lance, propriétés
- (5) Losanges : Propriétés, caractérisations, carrés
- (6) Polygones inscrits et circonscrits

4.8. **Points remarquables des triangles.** *Reconnait, nomme, décrit et construit les cercles inscrit et circonscrits, le centre de gravité, les médianes, l'orthocentre et les hauteurs d'un triangle.*

- (1) Médiatrices
 - Construction du centre du cercle circonscrit
 - Théorème du cercle circonscrit (avec démonstration)
 - Cas particulier des triangles rectangles
- (2) Hauteur et orthocentre (sans démonstration) : Triangle augmenté
- (3) Médianes et barycentre (sans démonstration)
- (4) Bissectrices et cercle inscrit (Démonstration de l'unicité)
- (5) Applications de ces résultats à l'inscription et à la circonscription de polygones.

4.9. Position relative des cercles et des droites.

- (1) Cercles tangents et sécants
- (2) Caractérisation de deux cercles tangents en fonction des rayons (la démonstration n'est pas à connaître)
- (3) Perpendicularité au rayon d'une droite tangente à un cercle (la démonstration n'est pas à connaître)

4.10. **Le double arc capable.** *L'élève reconnaît, nomme, décrit et construit une tangente à un cercle, l'angle au centre d'un cercle, l'angle inscrit dans un cercle et le cercle de Thalès.*

- (1) Connaître la définition d'un angle inscrit dans un cercle et d'un angle au centre.
- (2) Théorème de l'angle inscrit (avec démonstration).
- (3) Définition du double arc capable comme lieu géométrique.
- (4) Construction du double arc capable (la démonstration vue en cours ne sera pas demandée).
- (5) Cas particulier du cercle de Thalès.
- (6) Application : Construction des tangentes à un cercle passant par un point donné.

4.11. **Aire.** *L'élève compare, exprime, classe et mesure des grandeurs par manipulation de lignes et angles. Mesure et calcule l'aire d'un triangle, d'un carré, etc.*

- (1) L'aire comme notion fondamentale de la géométrie euclidienne.
- (2) Les trois axiomes qui caractérisent l'aire.
- (3) L'aire du rectangle (sans démonstration).
- (4) L'aire du triangle, du parallélogramme, des rhomboïdes, des trapèzes (avec démonstration).

4.12. **Le Théorème de Pythagore.** *L'élève utilise le théorème de Pythagore dans le plan.*

- (1) Théorème de Pythagore et réciproque.
- (2) Utilisation du Théorème direct et de sa réciproque pour reconnaître des triangles rectangles, calculer des aires, etc.

4.13. **Rapport de section.** *L'élève compare, exprime, classe et mesure des grandeurs par manipulation de lignes et angles.*

- (1) Définition de segment orienté.
- (2) Définition du rapport de section.
- (3) Construction de rapports de section simples.
- (4) Calcul de rapports de section rationnels.

5. COMPLÉMENT : LES DÉMONSTRATIONS MATHÉMATIQUES

Remarque 5.1. *Ce sujet sort du cadre du PER puisque nous y étudions différentes types de démonstrations pour aider les élèves à formaliser leur pensée mathématique, à développer la rigueur et la transmission des idées mathématiques.*

5.1. Vocabulaire.

Remarque. Les affirmations ont été introduites dans le module 1 en début d'année.

- (1) Affirmations, sophismes, syllogismes, conjectures
- (2) Lemme, proposition, théorème, corollaire
- (3) Tables de vérité

5.2. Raisonnements.

- (1) L'implication directe
- (2) La contraposée
- (3) Equivalence d'affirmations (si et seulement si)
- (4) Raisonnement par l'absurde
- (5) Raisonnement par récurrence